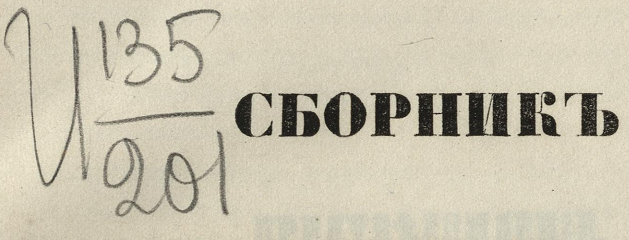


лутице





СБОРНИКЪ

МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ

ДЛЯ МЕЖЕВЫХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

СОСТАВЛЕНЪ

А. Ламовскимъ,

НАСТАВНИКОМЪ НАБЛЮДАТЕЛЕМЪ МАТЕМАТИКИ

ВЪ КОНСТАНТИНОВСКОМЪ МЕЖЕВОМЪ ИНСТИТУТѢ.

НАПЕЧАТАНЪ

ПО РАСПОРЯЖЕНІЮ МЕЖЕВАГО НАЧАЛЬСТВА.

МОСКВА,

ВЪ ТИПОГРАФІИ В. ГОТЬЕ.

1857.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по отпечатаніи представлено было въ Цензурный Комитетъ узаконенное число экземпляровъ. Москва, Іюля 4 дня, 1857 года.

Ценсоръ *В. Флеровъ.*



ПРЕДУВѢДОМЛЕНІЕ.

Предлагаемый сборникъ Математическихъ задачъ содержитъ въ себѣ: 1) задачи на Алгебру, касающіяся частей элементарныхъ этой науки и исчисленій высшихъ, т. е. Дифференціальнаго и Интегральнаго. 2) Задачи Геометрическія, рѣшаемыя преимущественно чрезъ вычисленіе. Послѣднія обнимаютъ: Геометрію начальную, Тригонометрію плоскую, сферическую и Аналитику. Сюда же отнесены и примѣры на примѣненіе Дифференціальнаго исчисленія къ рѣшенію вопросовъ, требующихъ теоріи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ и употребленія способа касательныхъ въ высшихъ кривыхъ. Я счелъ даже полезнымъ приложить таблицы чертежей, изображающихъ различныя формы этихъ кривыхъ. При этомъ учащійся, зная наименованіе кривой и ея уравненіе, будетъ имѣть и наглядное понятіе о расположеніи и теченіи ея (*).

При составленіи сказаннаго сборника принимались въ соображеніе потребности Математическаго курса ученія въ Межевыхъ учебныхъ заведеніяхъ. Существовало ли подобное собраніе задачъ, до сего времени, мнѣ неизвѣстно; впрочемъ всякій опытный преподаватель увидитъ и самъ въ чемъ состоитъ различіе этого сборника отъ другихъ ему подобныхъ. Отъ себя же считаю не лишнимъ замѣтить, что при упомянутомъ выше составленіи, а равно и

(*) Изъ высшихъ кривыхъ только нѣкоторыя входятъ въ учебный курсъ Межеваго Института. Для другихъ же кривыхъ уравненія не составляются, но принимаются данными, и употребляются какъ примѣры на общую теорію способа касательныхъ.

при расположеніи самыхъ задачъ, я имѣлъ цѣлію представить широкую и вмѣстѣ съ тѣмъ живую программу на все Математическое ученіе въ Межевомъ Институтѣ. По этимъ задачамъ и указаніямъ въ нихъ помѣщеннымъ составить учебникъ будетъ не трудно.

Въ Геометрическихъ задачахъ я помѣстилъ вопросы Геометріи не ученые, а учебные, т. е., которые не только можно, но и должно требовать, чтобы учащійся рѣшалъ, если только исправно понята пройденная имъ теорія. Большая часть вопросовъ числовыхъ, рѣшаемыхъ помощію уравненій; этимъ самымъ Геометрическія задачи служатъ какъ бы пополненіемъ задачамъ Алгебраическимъ, именно: на статью касательно составленія уравненій изъ вопросовъ; ибо я считаю болѣе правильнымъ пріучать составлять уравненія на вопросы полезные, на вопросы науки, чѣмъ на какое либо стадо гусей или т. п. Знаю, что нѣтъ особой научной заслуги въ составленіи учебныхъ задачъ; не менѣе того это дѣло нелегкое, и требующее не малаго терпѣнія, преимущественно при повѣркѣ, когда число задачъ заходитъ за многія сотни.

Оправданіемъ своему труду поставляю желаніе, съ какимъ я старался составить для учениковъ своихъ полезную книжку, въ которой бы они могли находить упражненія по всѣмъ родамъ изучаемой ими теоріи; тѣмъ болѣе, что отъ нихъ требуется не одно знаніе, но и умѣніе.

Признаніе труда моего полезнымъ высшимъ межевымъ начальствомъ, разсматривавшемъ его еще въ рукописи, а съ симъ вмѣстѣ и распоряженіе напечатать его на казенный счетъ, для меня утѣшительно, какъ удостовѣреніе, что предпринятая и исполненная мною работа не пропала даромъ, и что она соотвѣтствуетъ моему искреннему желанію принести пользу учащимся.

Наконецъ, поставляю себѣ долгомъ изъявить мою полную благодарность Капитану Аксенову, и бывшимъ ученикамъ моимъ: Капитану Межевыхъ Инженеровъ Александреву, Штабсъ-Капитану Эймондту, Поручику Вердеревскому

и Подпоручику Лѣтникову, за оказанную мнѣ помощь, при повѣркѣ нѣкоторыхъ отдѣловъ задачъ.

Сознавая вполнѣ, что сборникъ классныхъ задачъ долженъ быть безъ ошибокъ, я приму съ особою признательностію всякое указаніе на ошибку или просмотръ, которые и буду имѣть въ виду, ежели когда нибудь потребовалось бы второе изданіе составленной мною книги.

Еще прошу, прежде употребленія книги, выправить замѣченныя опечатки, которыя, къ сожалѣнію, вкрались, при всемъ желаніи чтобы ихъ не было.

А. Ламовскій.

ЗАДАЧИ АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

1. Задачи на чтеніе Алгебраическихъ выраженій.

1) $a^3 - \frac{3\sqrt{ab^3}}{2\sqrt[3]{c}} + d^m\left(1-\frac{c}{d}\right)$

2) $\sqrt{ax} - \frac{3\sqrt{x^5}}{(a+b)^3} - f:\left(n-\frac{r}{d}\right)$

3) $4a^2b^3 - \frac{12c^3}{8\sqrt{6b^n}} + \sqrt[3]{a^3m - a:\frac{3f^3}{(a-b)^2}} - (c^3-d^2):m$

4) $1-\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}:(a-b)+\frac{3ab:(a+b)^3}{\sqrt{(a-b)}}-\frac{1}{\sqrt[m]{b^n}}$

5) $\sqrt[5]{(m-n)^3} - \frac{1}{\sqrt[7]{b^3f^2}}:(q-z^2)+(c-d)^2.\left(1-\frac{\sqrt{m}}{(a-b)^2}\right)-\sqrt[5]{(a+b)}$

6) $c^3d - \frac{f^m}{\sqrt[m]{(a+b)^n}}:\sqrt{2b}-(c-d)^2:\frac{c}{\sqrt[m]{d}}+h^3\left(d-\frac{\sqrt{a}}{c}\right)$

7) $\frac{x^2h}{3(a-b)^2} - m:\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{a^2b}}+m^2b\right)+\frac{3h\sqrt[5]{(a+b)^m}}{2\sqrt{c^3}}$

8) $a^2:\left(1-\frac{b}{3a^2}\right)+\sqrt[4]{a}\left(a-\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)-\sqrt[n]{\frac{a^2}{b}}+c:\left(m-\sqrt[5]{\frac{c}{d}}\right)$

9) $\frac{7b^2c}{2\sqrt[n]{\frac{m}{n}}}:(a+b)+\frac{a^3\sqrt[3]{c^2}}{2n}-m:(a+b)^2-n\left(c^2-\frac{\sqrt[n]{a}}{2m}\right)$

10) $3abc\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c^2-d^2}\right)-\frac{5\sqrt[7]{b^4}}{m(a-b)}-\frac{4b^7d^4}{9}+m:\left(1-\sqrt[3]{\frac{x^2}{m}}\right)-(a-b+c)^2.\frac{h}{m}$

2. Задачи на употребленіе и вычисленіе скобокъ.

Полагая: $a=2$, $b=3$, $c=6$ и $d=4$, получимъ:

1) $a.\ b+c.\ d-1=29$

2) $a.(b+c.\ d-1)=52$

3) $(a.b+c)\ d-1=47$

4) $a.\ b+c\ (d-1)=24$

5) $(a.b+c)\ (d-1)=36$

6) $a\ [(b+c)\ d-1]=70$

7) $a\ [b+c\ (d-1)]=42$

Полагая: $e=4$, $f=6$, $g=2$, $h=8$, $i=10$, найдемъ:

8) $e.\ f+g.h-i:g=35$

9) $(e.f+g.\ h-i):g=15$

10) $(e.\ f+g).\ h-i:g=203$

Полагая: $a=3$, $c=\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$, $f=1$ и $d=\frac{1}{9}$, получимъ:

11) $ac-f\left(\frac{x}{y}-c\right)+ad=1$

Полагая: $a=3$, $b=1$, $c=2$, $d=\frac{47}{60}$, $h=8$, $n=5$, $r=\frac{1}{2}$ и $s=\frac{1}{3}$, найдемъ:

12) $(a-c):n+n:(c-b)-n\ (c-b):h.\ \frac{r}{s}-d=4$

Полагая: $\frac{r}{s}=\frac{1}{2}$, $c=4$, $d=3$, $f=5$, $z=2$, $a=1\frac{1}{2}$, $b=1$, $n=0,1$ и $y=0,7$ найдемъ:

13) $\left[\frac{r}{s}:(c-d)-n\ (f-z)\right]+\left[(a-b):n-\frac{r}{s}(f-z)\right]-y=3$

Полагая: $b=\frac{1}{11}$, $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $c=1$, $f=2$, $\frac{h}{r}=\frac{1}{8}$ и $t=\frac{13}{12}$, найдемъ:

14) $\left\{\left[\left(\frac{x}{y}-c\right):f+\frac{h}{r}:\left(\frac{c}{f}-\frac{h}{r}\right)\right]-\left[xy:\left(\frac{x}{y}.c-\frac{h}{r}\right)x-(y-b)\right]+\left(\frac{x}{y}-c\right)\right\}:t=1$

3. Задачи на изображеніе Алгебраическихъ выраженій.

1) $a-b+c$ возвысить въ степень n, и раздѣливъ результатъ на третью степень $a+b$, возвысить частное въ степень -1.

рез.) $\left[\frac{(a-b+c)^n}{(a+b)^3}\right]^{-1}$

2) Извлечь корень $(n+1)$—ой степени изъ a^{m+r}, вычтя отсюда b умноженное на c^2-d^2, раздѣлить полученный выводъ на $a-b$, возвышенное въ 4-ю степень.

рез.) $\frac{\sqrt[n+1]{a^{m+r}}-b(c^2-d^2)}{(a-b)^4}$

3) Составить сумму изъ 4-хъ слагаемыхъ; изъ нихъ два должны быть одночленны, одно двучленно, и одно трехчленно.

4) Составить произведеніе изъ 5-ти множителей, изъ нихъ три должны быть двучленны, а прочіе трехчленны.

5) a возвысить въ четную степень, раздѣлить результатъ на x^2-1, и вычесть отсюда b, возвышенное въ степень нечетную.

рез.) $\frac{a^{2n}}{x^2-1}-b^{2n\pm1}$

6) Изъ произведенія $a-b$ на c^3, раздѣленнаго на частное изъ x на $\sqrt[3]{y}$ извлечь корень нечетной степени.

рез.) $\sqrt[2n+1]{\frac{(a-b)c^3}{x:\sqrt[3]{y}}}$

7) $3c^3-2b^4$ раздѣлить на $(a-b-c)^3$ и придать къ частному $2a^2-b^3$, умноженное на $3\sqrt[4]{(a+b+c)}$; далѣе, изъ всего этого извлечь корень степени m.

рез.) $\sqrt[m]{\frac{3c^3-2b^4}{(a-b-c)^3}+(2a^2-b^3).\ 3\sqrt[4]{(a+b+c)}}$

8) a^2 раздѣлить на b дѣленное на $(n-m)$, изъ полученнаго частнаго вычесть $\frac{r}{s}$, умноженное на $\sqrt[3]{(a^2-x^2)}$ и все это раздѣлить на $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ возвышенное въ степень $n-1$.

рез.) $\left[\frac{a^2}{b:(n-m)}-\frac{r}{s}\left(\sqrt[3]{a^2-x^2}\right)\right]:\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{n-1}$

9) $(c-d)^2$ умножить на $\sqrt[3]{1-x^2}$, раздѣленный на b, умноженное на $1-\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$, изъ всего извлечь корень квадратный и къ выводу придать частное, происшедшее отъ дѣленія x на $\sqrt[m]{a+bx+cx^2}$.

рез.) $\sqrt{(c-d)^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{b.(1-\sqrt[m]{\frac{a}{b}})}+\frac{x}{\sqrt[m]{a+bx+cx^2}}}$

10.) $\sqrt[m]{c-d}$ сложить съ произведеніемъ изъ b^m на $1-\frac{x^2}{y^2}$, вычесть изъ суммы c, раздѣленное на $(a+b)^2$, полученный выводъ возвесть въ степень n и изъ всего извлечь корень степени m.

рез.) $\sqrt[m]{\left[\sqrt[m]{c-d}+b^m\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)-c:\ (a+b)^2\right]^n}$

Какая перемѣна произойдетъ въ результатѣ, когда $m=n$?

11) $\sqrt[m]{a^n}$ раздѣлить на $\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[m]{a}}$, вычесть отсюда $(a-b)^m$, раздѣлить остатокъ на $2\sqrt[n]{(a+b-c)^m}$ и наконецъ все возвесть въ степень $\frac{2n-m}{n}$.

рез.) $\left\{\left[\sqrt[m]{a^n}:\ \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[m]{a}}-(a-b)^m\right]:\ 2\sqrt[n]{(a+b-c)^m}\right\}^{\frac{2n-m}{n}}$

Какая перемѣна произойдетъ въ результатѣ, когда $m=n$ и $a=b$?

12) $\frac{a^{m-1}}{c^2}$ сложить съ $(a-d)^q$, уменьшенномъ количествомъ b^m; выводъ раздѣлить на $(1+x^2+x^3)^2$ и изъ всего извлечь корень степени m.

рез.) $\sqrt[m]{\left[\frac{a^{m-1}}{c^2} + \left\{(a-d)^q - b^m\right\}\right] : (1+x^2+x^3)^2}$

Какая перемѣна произойдетъ въ результатѣ, когда $m=2$ и $a=c$?

13) x^2 уменьшить количествомъ $\frac{2x-1+\sqrt{c}}{3}$, остатокъ умножить на $\frac{x-\sqrt{m}}{x+\sqrt{m}}$, изъ всего извлечь корень n—ой степени, возвысивъ полученный результатъ въ степень $p+1$.

рез.) $\left\{\sqrt[n]{\left(x^2-\frac{2x-1+\sqrt{c}}{3}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{m}}{x+\sqrt{m}}}\right\}^{p+1}$

Какая перемѣна произойдетъ въ результатѣ, когда $p=n-1$?

14) $2a^2b-\sqrt[n]{c^m}$ возвысить въ степень $n-1$, извлекая отсюда корень степени p; далѣе, придать сюда $2a^2b-\sqrt[m]{c^n}$ возвышенное въ степень p, извлекая изъ сего корень степени $n-1$; наконецъ изъ всего, вычтя $\frac{n-1}{p}$, извлечь корень степени $p+1$.

рез.) $\sqrt[p+1]{\left\{\sqrt[p]{(2a^2b-\sqrt[n]{c^m})^{n-1}}+\sqrt[n-1]{(2a^2b-\sqrt[m]{c^n})^p}\right\}-\frac{n-1}{p}}$

Какая перемѣна произойдетъ въ результатѣ, когда $n-1=p$ и $a=b$?

4. *Задачи на приведеніе и раскрытіе скобокъ.*

1) $abc^3-3abc^3+5ab^2c^3-6abc^3+4a^3b^3c^3-3ab^2c^3+9abc^3-7a^3b^3c^3$

рез.) $abc^3+2ab^2c^3-3a^3b^3c^3$

2) $6a^3-4a^2b+10b^3+28a^3+18ab^2-18abc+4ac^2-38a^2b-4b^3-26ab^2+18abc$

рез.) $34a^3-42a^2b+6b^3-8ab^2+4ac^2$

3) $3p^2h^5x^{m-1} - 7p^2h^5x^{m-1} - p^2h^5x^{m-1} + 17p^2h^5x^{m-1}$

рез.) $12p^2h^5x^{m-1}$

4) $2y^{-m} - 8y^{-m} + 25y^{-m} - 145y^{-m} + y^{-m}$

рез.) $-125y^{-m}$

5) Представить многочленъ $a-b+c-d$ въ различныхъ видахъ, поставляя скобки въ разныхъ мѣстахъ между его членами, и вычислить его, полагая $a=5$, $b=4$, $c=3$ и $d=1$?

рез.) α.) $a-b+c-d=3$

β.) $a-(b-c+d)=3$

γ.) $a-(b-c)-d=3$

δ.) $a-b+(c-d)=3$

η.) $(a-b+c)-d=3$

$\varkappa$.) $(a-b)+c-d=3$

λ.) $-(-a+b-c+d)=3$

6) $(25a^6+14b^2-9cd^7)-(16a^6-13c^7+8cd^7-9x^4)$

рез.) $9a^6+14b^2-17cd^7+13c^7+9x^4$

7) $(23a^2b^2c^2-12a^5+14c^2g^5-19d^8f^3)-(16a^2b^2c^2+24a^5b^2-12a^5$
$+15c^2g^5-14d^8f^2)$

рез.) $12a^3+7a^2b^2c^2-12a^5-24a^5b^2-c^2g^5-5d^3f^2$

8) $(-\frac{3}{4}x^5+6\frac{1}{2}yz^4-9\frac{1}{3}z^5)-(\frac{5}{6}x^5-12\frac{1}{2}yz^4+\frac{5}{8}z^5-\frac{3}{4}x^2y^3)$

рез.) $-\frac{19}{12}x^5+19yz^4-\frac{239}{24}z^5+\frac{3}{4}x^2y^3$

9) $1-[(3b^4+2a^8+8)-(5b^4+6a^8+7)-(m-2b^4-4a^8)]$

рез.) m

10) $4x^5-[(a-4x^5)+(3y^2+17a)-(18x^5+3y^2)]$

рез.) $26x^5-18a$

11) $m^5-(4y-3x^5)-\{(2x^5+y)+(2x^5-y)-[(2x^5+y)-(2x^5-y)]\}$

рез.) m^5-2y-x^5

12) $(3a^4-2b^2)-\{3b^2-[4a^4-\{8b^2-[6a^4-(5a^4-4b^2)]\}]\}$

рез.) $8a^4-9b^2$

13) $z^5-(-3x^2)+(-12z^5)-4x^2+(-2z^5)-(-x^2)$

рез.) $-13z^5$

14) $\frac{9}{x}-\left(-\frac{2}{x}+\frac{3}{z}\right)-\left(-\frac{5}{x}-\frac{19}{z}\right)$

рез.) $\frac{16}{x}+\frac{16}{z}$

15) $2\,\frac{m}{n}-\left[-\left(\frac{4a}{n}\right)-\left(-\,\frac{3m}{n}\right)-\left(-\frac{9a}{n}\right)-\left(-\,\frac{5m}{n}\right)\right]$

рез.) $-\,6\,\frac{m}{n}-\,5\,\frac{a}{n}$

16) $2n^3-[-(-2a^2)+(-5n^3)-(-9a^2)-(-11a^2)]$

рез.) $7n^3-22a^2$

5. Задачи на умноженіе количествъ одночленныхъ и многочленныхъ.

1) $3a^3.-5a^7.a^5.-7a^6$

рез.) $105a^{21}$

2) $2a^4b^3.-6ab^2.-2b.-a^3$

рез.) $-24a^8b^6$

3) $-\,\frac{1}{4}\,a^8b^5c.-\,1\frac{1}{2}\,a^7b^9c^3f.-2a^5b^3cfg$

рез.) $-\,\frac{3}{4}\,a^{20}b^{17}c^5f^2g$

4) $\frac{3}{4}\,a^3b^3c.-\,\frac{1}{2}\,ab^3c^4-[\,\frac{7}{2}\,a^3b^3c.\,\frac{3}{11}\,ab^5c^4-(3a^3.b^3-ad)]$

рез.) $3a^3b^3-\,\frac{117}{88}\,a^4b^8c^5-ad$

5) $0,3a^xb^qc^{r+1}.\frac{3}{4}\,a^{x+1}b^2cf-(0,01a^{2x+1}b^{q+2}c.-10c^{r+1}f-$
$\frac{1}{3}\,x^{q+p}y^m.0,02xy)$

рез.) $\frac{13}{40}\,a^{2x+1}b^{q+2}c^{r+2}f+\frac{1}{150}\,x^{q+p+1}y^{m+1}$

6) $(a^2-3ab-5b^2).4a^2b$

рез.) $4a^4b-12a^3b^2-20a^2b^3$

7) $(2a^3b^5-5a^2c^6+9a^3b^2c^3).\,3a^2bc^2$

рез.) $6a^5b^6c^2-15a^4bc^8+27a^5b^3c^5$

8) $(2a^4c-6a^3c^4-5ac^6+ac).2a^2bc$

рез.) $4a^6bc^2-12a^5bc^5-10a^3bc^7+2a^3bc^2$

9) $b^4-m^3.\left\{(a^2+2b^4)-(a^2-2b^4)-(1+5b^4)\right\}$

рез.) $b^4+m^3+b^4m^3$

10) $1-(m^2-n^2).2a^4-\left\{(a^4+2b^3-3c).n^2-m^2.(a^4-4c+1)+\right.$

$n^2(a^4-2b^3+3c)\}+m^2.(a^4+4c)$

РЕЗ.) $1+m^2$

11) $(3a^3-5b^2).\ (4a^5+3b^4)$

РЕЗ.) $12a^8-20a^5b^2+9a^3b^4-15b^6$

12) $(a^3+a^2b+ab^2+b^3).\ (a-b)$

РЕЗ.) a^4-b^4

13) $(a^2+2ab+2b^2).\ (a^2-2ab+2b^2)$

РЕЗ.) a^4+4b^4

14) $(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3).\ (a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)$

РЕЗ.) a^6-b^6

15) $(a^6-4a^5+3a^4-2a^3+a^2).\ (a^6+4a^5-3a^4+2a^3-a^2)$

РЕЗ.) $a^{12}-16a^{10}+24a^9-25a^8+20a^7-10a^6+4a^5-a^4$

16) $(a^2+az+z^2).\ (a^2-az+z^2)$

РЕЗ.) $a^4+a^2z^2+z^4$

17) $(5a^3-4a^2x+5ax^2-3x^3).\ (4a^2-5ax+2x^2)$

РЕЗ.) $20a^5-41a^4x+50a^3x^2-45a^2x^3+25ax^4-6x^5$

18) $(5a^3b^3c^2-6a^4b^2c^3+7a^8b^3c^6).\ (2a^3b^3c^2+3a^4b^2c^3-6a^7b^4c^3)$

РЕЗ.) $10a^6b^6c^4+3a^7b^5c^7+14a^{11}b^8c^8-18a^8b^4c^{10}+21a^{12}b^7c^{11}$

$-30a^{10}b^7c^5+36a^{11}b^6c^8-42a^{15}b^9c^9$

19) $(\frac{5}{2}x^2+3ax-\frac{7}{3}a^2).\ (2x^2-ax-\frac{1}{2}a^2)$

РЕЗ.) $5x^4+\frac{7}{2}ax^3-\frac{107}{12}a^2x^2+\frac{5}{6}a^3x+\frac{7}{6}a^4$

20) $(3a-5b+\frac{3}{4}c-\frac{5}{3}d).\ (\frac{2}{3}a-b+7c+\frac{1}{2}d)$

РЕЗ.) $2a^2-\frac{19}{3}ab+\frac{43}{2}ac+\frac{7}{18}ad+5b^2-\frac{143}{4}bc-\frac{5}{6}bd+$

$\frac{21}{4}c^2-\frac{271}{24}cd-\frac{5}{6}d^2$

21) $(3x^4y^3-\frac{3}{4}x^3y^2+\frac{1}{2}y-12).\ (\frac{1}{2}x^2y+3y)$

РЕЗ.) $\frac{3}{2}x^6y^4-\frac{3}{8}x^5y^3+9x^4y^4-\frac{9}{4}x^3y^3+\frac{1}{4}x^2y^2-6x^2y+\frac{3}{2}y^2-36y$

22) $(\frac{4}{5}a^5+\frac{3}{4}a^4b+\frac{2}{3}a^3b^2+\frac{1}{4}a^2b^3+\frac{1}{2}ab^4+\frac{5}{6}b^5).\ (\frac{4}{5}a^5-\frac{3}{4}a^4b+$

$\frac{2}{3}a^3b^2-\frac{1}{4}a^2b^3+\frac{1}{2}ab^4-\frac{5}{6}b^5)$

РЕЗ.) $\frac{16}{25}a^{10}+\frac{121}{240}a^8b^2+\frac{313}{360}a^6b^4-\frac{31}{48}a^4b^6-\frac{1}{6}a^2b^8-\frac{25}{36}b^{10}$

23) $\left(\frac{a^3b^3}{c^3}-\frac{6a^2b^4}{c^2d}+\frac{4ab^2}{cd^2}\right).\left(\frac{a^3b^3}{c^3}+\frac{6a^2b^4}{c^2d}-\frac{4ab^2}{cd^2}\right)$

РЕЗ.) $\frac{a^6b^6}{c^6}-\frac{36a^4b^8}{c^4d^2}+\frac{48a^3b^6}{c^3d^3}-\frac{16a^2b^4}{c^2d^4}$

24) $(a^m+b^p-2c^n).\ (2a^m-3b)$

рез.) $2a^{2m}+2a^mb^p-4a^mc^m-3a^mb-3b^{p+1}+6bc^n$

25) $(2a^{3-2m}b^{n+3}+3a^{m+1}b^{n+2}+c^p).\ (a^{m-1}b^{1-2m}-ca^p)$

рез.) $2a^{2-m}b^{n-2m+4}+3a^{2m}b^{n-2m+3}+a^{m-1}b^{1-2m}c^p-$
$2ca^{p-2m+3}b^{n+3}-3ca^{p+m+1}b^{n+2}-a^pc^{p+1}$

26) $(ax+bx^2+cx^3+dx^4).\ (m+nx+px^2+\gamma x^3)$

рез.) $amx+(bm+an)x^2+(cm+bn+ap)x^3+(dm+cn+bp+$
$a\gamma)x^4+(dn+cp+b\gamma)x^5+(dp+c\gamma)x^6+d\gamma x^7$

27) $[(2b-c)a^2-(b+c)ab+b^3]\ .\ [(2b-c)a^2+(b+c)ab-b^3]$

рез.) $(4b^2-4bc+c^2)a^4-(b^2+2bc+c^2)a^2b^2+(b+c)\,2ab^4-b^6$

28) $\{(a^2b-cx)2bc-(a^3x-2c^2d)3ab^2-[(c-2a^2x)8a^2b^2-(3x-$
$2abd)3bc^2]\}.(6ab^3c^2-7ab^2c^3x)$

рез.) $(1+a^2)42ab^4c^4x-(6c-13a^2x)6a^3b^3c^2-(7c^2+13a^4b)\times$
$7ab^3c^3x^2$

6. Задачи на дѣленіе количествъ одночленныхъ и многочленныхъ.

1) $12x^5y^4z^3 : 4x^3y^3z^2$

рез.) $3x^2yz$

2) $15a^3bc^2 : 2a^2c$

рез.) $7\frac{1}{2}\,abc$

3) $18ab^2c^5d^4 : 2a^5b^3c^6d^7$

рез.) $\frac{9}{a^4bcd^3}$

4) $17x^my^{n+p}z^{m+1} : 5x^ny^{3n-p}z^5$

рез.) $3\frac{2}{5}\,x^{m-n}y^{2p-2n}z^{m-4}$

5) $21x^3y^{-4} : 7x^{-4}y^3$

рез.) $3x^7y^{-7}$

6) $18cxd^ym^{l+n} : 3cxd^{-y}m^{l-n}$

рез.) $6d^{2y}m^{2n}$

7) $51c^9y^4z^{-3} : 17c^my^nz^{-6}$

рез.) $3c^{9-m}y^{4-n}z^3$

8) $6(a+b)^9 : 4(a+b)^{-3}$

рез.) $\frac{3}{2}(a+b)^{14}$

9) $(a+x)^2(a+y)^{-3}:(a+x)^{-4}(a+y)^{-7}$

рез.) $(a+x)^6.\ (a+y)^4$

10) $(a^3b^2+4a^3b^3-3ab^2+ab^3):a^2b$

рез.) $a^3b+4ab^2-3a^{-1}b+a^{-1}b^2$

11) $(\frac{5}{6}a^{-4}b^3c-\frac{3}{8}a^6c^4+5b^2c^{-3}-6ab^3c^3):3a^2bc^3$

рез.) $\frac{5a^{-6}b^2c^{-2}}{18}-\frac{a^4c}{8b}+\frac{5bc^{-6}}{3a^2}-2a^{-1}b^2$

12) $(a^2d^2+b^3d^2-c^3d^2+a^2f+b^3f-c^3f) : (d^2+f)$

рез.) $a^2+b^3-c^3$

13) $(1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5) : (1-3x+3x^2-x^3)$

рез.) $1-2x+x^2$

14) $(a^4+a^2b^2-2b^4+2a^2c^2-5b^2c^2-3c^4) : (a^2-b^2-c^2)$

рез.) $a^2+2b^2+3c^2$

15) $(15a^7b^3+25a^6b^4+9a^6b^6-3a^3b^7-9a^4b^6+6a^3b^7-a^2b^8)$:
$(5a^3b^2+3a^2b^3-ab^4)$

рез.) $3a^4b^3+5a^3b^2-3a^2b^3+ab^4$

16) $(24x^8z^4-2x^7z^5-11x^6z^6+16x^5z^7-14x^4z^8+12x^3z^9-$
$10x^2z^{10}+4xz^{11}-z^{12}) : (4x^3z^3+3x^2z^4-2xz^5+z^6)$

рез.) $6x^5z-5x^4z^2+4x^3z^3-3x^2z^4+2xz^5-z^6$

17) $(20a^8b^3c^4-12a^7b^3c^5+8a^3b^3c^6-15a^7c^6+9a^6c^7-6a^4c^8-$
$4a^3b^3c^8+3a^2c^{10}) : (5a^6c^4-3a^5c^5+2a^3c^6-ac^8)$

рез.) $4a^2b^3-3ac^2$

18) $(\frac{1}{3}-6z^2+27z^4) : (\frac{1}{3}+2z+3z^2)$

рез.) $1-6z+9z^2$

19) $(-a^8b^4+15a^{11}b^5-48a^{14}b^6-20a^{17}b^7) : (10a^9b^2-a^6b)$

рез.) $a^2b^3-5a^5b^4-2a^8b^5$

20) $(a^8-16z^8) : (a^2-2z^2)$

рез.) $a^6+2a^4z^2+4a^2z^4+8z^6$

21) $(\frac{1}{3}x^4-\frac{11}{12}x^3+\frac{41}{8}x^2-\frac{23}{4}x+6) : (\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}x+1)$

рез.) $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+6$

22) $(\frac{3}{4}x^5-4x^4+\frac{77}{8}x^3-\frac{43}{4}x^2-\frac{33}{4}x+27) : (\frac{1}{2}x^2-x+3)$

рез.) $\frac{3}{2}x^3-5x^2+\frac{1}{4}x+9$

23) $(a^6-b^6):(a-b)$

РЕЗ.) $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$

24) $(a^6-16a^3x^3+64x^6):(a^2-4ax+4x^2)$

РЕЗ.) $a^4+4a^3x+12a^2x^2+16ax^3+16x^4$

25) $(3x^{10}y-9x^8y^2-4x^8y+24x^6y^2+16x^6-96x^4y-16x^4y^2+$
$128x^2y-256):(x^6-3x^4y+4x^2y-16)$

РЕЗ.) $3x^4y-4x^2y+16$

26) $(a^6-x^6):(a^2-ax+x^2)$

РЕЗ.) $a^4+a^3x-ax^3-x^4$

27) $(a^6+2a^3z^3+z^6):(a^2-az+z^2)$

РЕЗ.) $a^4+a^3z+az^3+z^4$

28) $(21a^8b^{-6}+9a^6b^{-5}-14a^3b^{-2}-6a+3a^{-1}b^2-6ab^{-1}+$
$4a^{-4}b^4-2a^{-6}b^6):(3a^3b^{-2}-2a^{-2}b^2)$

РЕЗ.) $7a^5b^{-4}+3a^3b^{-3}-2a^{-2}b^2+a^{-4}b^4$

29) $(a^{m+n}b^n-4a^{m+n-1}b^{2n}-27a^{m+n-2}b^{3n}+42a^{m+n-3}b^{4n}):$
$(a^nb^n-7a^{n-1}b^{2n})$

РЕЗ.) $a^m+3a^{m-1}b^n-6a^{m-2}b^{2n}$

30) $[a^{3m-2n}b^{2p}c-a^{2m+n-1}b^{1-p}c^n+a^{-n}b^{-1}c^m+a^{3m-n}b^{3p+2}c^n-$
$a^{2m+2n-1}b^3c^{2n-1}+b^{p+1}c^{m+n-1}]:[a^{-n}b^{-(p+1)}+bc^{n-1}]$

РЕЗ.) $a^{3m-n}b^{3p+1}c-a^{2m+2n-1}b^2c^n+b^pc^m$

31) $[a^2bx^8-(a^3b-a^5)x^7-(8x-7a)a^6x^5]:(a^2x^2-a^3x)$

РЕЗ.) $bx^6+a^3x^5-7a^4x^4$

32) $[(9c^2+12cd+4d^2)a^3b^2-(9c^2-4d^2)a^2b^3c]:(3c+2d)ab^2$

РЕЗ.) $(3c+2d)a^2-(3c-2d)abc$

33) $[(5a^2bc+8c^3d-5dx^2)-3(a^2bc+4c^3d+y^m)]\cdot[6c(a^2b+2c^2d)-$
$3(-5dx^2-y^m)]:\{(8c^3d+7dx^2)-[12(c^3d+dx^2)-2a^2bc+3y^m]\}$

РЕЗ). $6a^2bc+12c^3d+15dx^2+3y^m$

34) $\{a[3a+\frac{1}{4}(26b-21c)]+\frac{b}{8}(20b-77c)-\frac{3}{2}c^2\}:$
$\frac{1}{4}(12a+20b+3c)$

РЕЗ.) $\frac{1}{2}(2a+b-4c)$

35) $x^3[-a^{-1}(2a^{-8}-17a^{-4}x+5x^2)-24a^3x^3]:[(-a^{-4}+7x)a^{-4}$
$+8x^2]a^2$

РЕЗ.) $ax^3(2a^{-4}-3x)$

36) $[\frac{1}{3}-3z^2(2+3z)^2]:[\frac{1}{3}+z(2+3z)]$

рез.) $1-3z(2+3z)$

37) $[\frac{x^4}{4}(3x-16)+\frac{x^2}{8}(77x-86)+3(9-\frac{11}{4}x)]:[(\frac{1}{2}x-1)x+3]$

рез.) $[(3x-10)2x+1]\frac{x}{4}+9$

38) $\{5a(\frac{a}{4}-b)+\frac{3}{4}[b(b-c)+5ac]\}:\frac{1}{4}[5a-3(b-c)]$

рез.) $5a-b$

39) $a^2x^3\{[6x-a(6-a^2)]x^2-a^4(8x-7a)\}:a^2x(x-a)$

рез.) $[6x^2+a^3(x-7a)]x^4$

40) $(1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+$и т. д.$):(1-x)$

рез.)

$1+1$	$x+1$	x^2+1	x^3 и т. д.
$+a$	$+a$	$+a$	
	$+b$	$+b$	
		$+c$	

41) $7:(3+2x)$

рез.) $\frac{7}{3}(1-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{27}x^3+\frac{16}{81}x^4-$ и проч.)

42) $(5x+3):(4-2x)$

рез.) $\frac{3}{4}+\frac{13}{8}x+\frac{13}{16}x^2+\frac{13}{32}x^3+\frac{13}{64}x^4+$ и проч.

43) $a:(1+x)$

рез.) $a-ax+ax^2-ax^3+ax^4-$и проч.

44) $a:(x+1)$

рез.) $\frac{a}{x}-\frac{a}{x^2}+\frac{a}{x^3}-\frac{a}{x^4}+$ и проч.

45) $(a+x):(b-x)$

рез.) $\frac{a}{b}+\frac{a+b}{b^2}x+\frac{a+b}{b^3}x^2+\frac{a+b}{b^4}x^3+$ и проч.

46) $a:(1-x)$

рез.) $a+ax+ax^2+ax^3+ax^4+$ и проч.

47) $a:(x-1)$

рез.) $\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a}{x^3}+\frac{a}{x^4}+$ и проч.

7. Задачи на выставленіе общаго множителя за скобку и обращеніе суммъ и разностей въ произведеніе.

1) $5a-10b+15c$

рез.) $5(a-2b+3c)$

2) $18a^2b-12ab^2$

рез.) $6ab(3a-2b)$

3) $15ab^2cdg-30abc^2g^2$

рез.) $15abcg(bd-2cg)$

4) $(x-1)a+bc(x-1)$

рез.) $(x-1)(a+bc)$

5) $3ac+3a-c-1$

рез.) $(3a-1)(c+1)$

6) $5(z+1)+15m(z+1)$

рез.) $5(z+1)(1+3m)$

7) $3x(x-y)-3y(x-y)$

рез.) $3(x-y)^2$

8) $4u(u-z)-6z(u-z)+2u(u-z)$

рез.) $6(u-z)^2$

9) $6m(x-y)+2m(y-x)+4(y-x)$

рез.) $4(y-x)(1-m)$

10) $m(a-bx)+n(a+bx)-(m-1)(a-bx)-(n-1)(a+bx)$

рез.) $2a$

11) $(a+b)^2+(a-b)^2$

рез.) $2(a^2+b^2)$

12) $(a+b)^2-(a-b)^2$

рез.) $4ab$

13) $(a+b)^2-4ab$

рез.) $(a-b)^2$

14) $(a-b)^2+4ab$

рез.) $(a+b)^2$

15) $acg+adg+ach+adh+bcg+bdg+bch+bdh$

рез.) $(a+b)(c+d)(g+h)$

16) $4acg+12adg-6ach-18adh-2bcg-6bgd+3bch+9bdh$

рез.) $(2a-b)(c+3d)(2g-3h)$

17) $(2a+3b)4a-16ac-3b(3b-4c)-8c^2+2c(2a+3b)-6ab$

рез.) $(2a+3b-4c)(4a+2c-3b)$

18) $(3a+4b)(4a-3b+2c)-8ac-2c(2c-3b)-4a(a+b+2c)+$

$3b(a+b)+6bc-2ac-2c(2c+b)$

рез.) $(4a-3b+2c)(2a+3b-4c)$

19) $(c^2-d^2)(c+d)$

рез.) $(c-d)(c+d)^2$

20) $(c^2-d^2)(c-d)$

рез.) $(c+d)(c-d)^2$

21) $y(9m+8n-7p)+2(5m-4n)(x-y)+6p(x-y)-9mx-$

$8nx+7px$

рез.) $(y-x)(16n-13p-m)$

22) $m^3-mn^2+m^2n-n^3$

рез.) $(m+n)^2(m-n)$

23) $m^3-mn^2-m^2n+n^3$

рез.) $(m-n)^2(m+n)$

24) $n(n-1)(n-2)+6n^2(n-1)$

рез.) $n(n-1)(7n-2)$

25) $c^2-a^2+2ab-b^2$

рез.) $(a+c-b)(b+c-a)$;

или предполагая: $a+b+c=2p$, найдемъ: $4(p-a)(p-b)$

26) $a^2+b^2-c^2+2ab$

рез.) $(a+b+c)(a+b-c)$;

или предполагая: $a+b+c=2p$, получимъ: $4p(p-c)$

27) $4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2$

рез.) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$;

или полагая: $a+b+c=2p$, найдемъ: $16p(p-a)(p-b)(p-c)$

28) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-ac^2-bc^2$

рез.) $(a+b)(a+b+c)(a+b-c)$

29) $a^2b-a^2c-b^3+3b^2c-3bc^2+c^3$

рез.) $(b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

30) p^2-q^2-p+q

рез.) $(p+q-1)(p-q)$

31) $n^4+2mn^3-m^4-2m^3n$

рез.) $(n+m)^3(n-m)$

32) a^4+a^2-2

рез.) $(a^2-1)(a^2+2)$

33) $4a^4-8+4a^2$

рез.) $4(a^2-1)(a^2+2)$

8. Задачи на нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя.

Найти общій наибольшій дѣлитель многочленовъ:

1) $45a^3b^4c+27a^8b^7cd-9a^4b^2d^3$ и $30a^2b^2c^3d^4+18a^7b^5c^3d^5-6a^3c^2d^7$

Об. наиб. дѣл. $15a^2b^2c+9a^7b^5cd-3a^3d^3$

2) $30a^{3n-1}b^vc^{v+2}-6a^{2n-4}b^3c^vd^{v-1}$ и $20a^nb^{v-1}c^2d^2-4a^{-3}b^2d^{v+1}$

Об. наиб. дѣл. $10a^nb^{v-1}c^2-2a^{-3}b^2d^{v-1}$

3) $3a^3-3a^2b+ab^2-b^3$ и $4a^2b-5ab^2+b^3$

Об. наиб. дѣл. $a-b$

4) $12adf+18bdf-10cdf$ и $6ac+9bc-5c^2$

Об. наиб. дѣл. $6a+9b-5c$

5) $a^3+(1+a)ay+y^2$ и a^4-y^2

Об. наиб. дѣл. a^2+y

6) $5a^5+10a^4x+5a^3x^2$ и $a^3x+2a^2x^2+2ax^3+x^4$

Об. наиб. дѣл. $x+a$

7) $3x^2-2x-1$ и $2x^2-5x+3$

Об. наиб. дѣл. $x-1$

8) x^4-y^4 и $x^3-x^2y-xy^2+y^3$

Об. наиб. дѣл. x^2-y^2

9) $36a^2cd-120abcd+100b^2cd$ и $36a^3c-6a^2bc-90ab^2c$

Об. наиб. дѣл. $2c(3a-5b)$

10) $6a^3-6a^2y+2ay^2-2y^3$ и $12a^2-15ay+3y^2$
Об. наиб. дѣл. $a-y$

11) $3a^3-24a-9$ и $2a^3-16a-6$
Об. наиб. дѣл. a^3-8a-3

12) $x^6-9x^4-16x^3-9x^2+1$ и x^5+x^4-x-1
Об. наиб. дѣл. x^2+2x+1

13) $4a^4-4a^2b^2+4ab^3-b^4$ и $6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4$
Об. наиб. дѣл. $2a^2+2ab-b^2$

14) $54a^2b-24b^3$ и $45a^3b-30a^2b^2-9ab^3+6b^4$
Об. наиб. дѣл. $3b(3a-2b)$

15) $6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$ и $4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$
Об. наиб. дѣл. $2x^3-4x^2+x-1$

16) $a^2d^2-c^2d^2-a^2c^2+c^4$ и $4a^2d-2ac^2+2c^3-4acd$
Об. наиб. дѣл. $a-c$

17) $6a^3-17a^2b+22ab^2-15b^3$ и $6a^2-17ab+12b^2$
Об. наиб. дѣл. $2a-3b$

18) $a^3-a^2b+3ab^2-3b^3$ и $a^2-5ab+4b^2$
Об. наиб. дѣл. $a-b$

19) $8x^3-6x^2-7x+4$ и $-2x^3-7x^2+12x-4$
Об. наиб. дѣл. $2x-1$

20) $a^2b^2+c^4-a^2c^2-b^2c^2$ и $6a^2b+3c^3-3ac^2-6abc$
Об. наиб. дѣл. $a-c$

21) $7ab^2-6a^2b-2b^3$ и $7ab^2-4a^2b+4a^3-3b^3$
Об. наиб. дѣл. $2a-b$

22) $6x^5+15bx^4-4c^2x^3-10bc^2x^2$ и $9bx^3-27bcx^2-6bc^2x+18bc^3$
Об. наиб. дѣл. $3x^2-2c^2$

23) $15a^5+10a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3-3ab^4$ и $12a^3b^2+38a^2b^3+$
$16ab^4-10b^5$
Об. наиб. дѣл. $3a^2+2ab-b^2$

24) $a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)$ и $a^3(b^2+2bc+c^2)-$
$a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)$
Об. наиб. дѣл. $(a-b)(b+c)$

25) $qnp^3+3np^2q^2-2npq^3-2nq^4$ и $-2mp^2q^2+4mp^4-mp^3q-mpq^3$
Об. наиб. дѣл. $p-q$

26) $2abx^7+2a^2x^6-2abxy^6-2a^2y^6-b^2y^6+b^2x^6$ и $2a^8+2a^7bx+a^6b^2-2a^2b^6-2ab^7x-b^8$

Об. наиб. дѣл. $2a(a+bx)+b^2$

27) $2f^6+3af^4-4cf^5-f^5x+2a^2f^3+3a^5f-4a^2cf^2-a^2x$ и $2a^5f^3+3a^4f-4a^5cf^2-a^5x-2f^5-3af^3+4cf^4+f^2x$

Об. наиб. дѣл. $f[3a-2f(2c-f)]-x$

9. Задачи на алгебраическія дроби.

1) $m+\frac{(m-1)a+b}{a}$

рез.) $\frac{a(2m-1)+b}{a}$

2) $m-\frac{(m-1)a+b}{a}$

рез.) $\frac{a-b}{a}$

3) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$

рез.) $\frac{2a}{a^2-b^2}$

4) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$

рез.) $\frac{2b}{a^2-b^2}$

5) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$

рез.) $\frac{a(d-c)-c(b-a)}{bd}$

Числовой примѣръ:

$$\frac{17}{19}-\frac{13}{16}=\frac{17.3-13.2}{19.16}=\frac{25}{304}$$

6) $\frac{(x+z)^2}{4xz}-1$

рез.) $\frac{(x-z)^2}{4xz}$

7) $\frac{a^3}{(a+b)^3}-\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{b}{a+b}$

рез.) $\frac{a^3+ab^2+b^3}{(a+b)^3}$

8) $\left(\frac{a}{ab+bc}+\frac{3}{2a+2c}\right):\frac{4ac+6bc}{3a^2+3ac}-\frac{a}{2bc}$

рез.) $\frac{a}{4bc}$

9) $\left(\frac{a}{a-x}-\frac{a}{a+x}\right):\frac{ax}{a^2-x^2}$

рез.) 2

10) $\left\{\frac{a+1}{ax+1}+\frac{x+1}{x+\frac{1}{a}}-1\right\}:\left\{\frac{a+1}{a(x+\frac{1}{a})}-\frac{a(x+1)}{ax+1}+1\right\}$

рез.) a

11) $\left\{\frac{a^2+b^2-c^2}{2(a+c)b}-\left(1:\frac{2b(a+c)}{b^2+c^2-a^2}\right)\right\}:\left\{\frac{a-c}{b}-\frac{a}{c}\cdot\frac{c^2-a^2}{2(a+c)b}\right\}$

рез.) $\frac{2c(a-c)}{a^2+ac-2c^2}$

12) $\left\{a-z+\frac{z^2}{a-z}\left(1-\frac{z^2+az}{a^2+2az+z^2}\right)\right\}:\left\{\frac{a^2}{a+z}+\frac{z^2}{a^2+2az+z^2}\right\}$

рез.) $\frac{a+z}{a-z}\cdot\frac{(a-z)^2(a+z)+az^2}{a^2(a+z)+z^2}$

10. Задачи на степени и корни количествъ одночленныхъ.

1) $\left[(ab.c^2)^3.\sqrt{a^6b^8}-\sqrt[3]{a^2}:\sqrt{\frac{a^3}{b^2}}\right]^2$

рез.) $a^{12}b^{14}c^{12}-\frac{2a^6b^8c^6}{\sqrt[6]{a^5}}+\frac{b^2}{a\sqrt[3]{a^2}}$

2) $\left(\sqrt[m]{ab}:\frac{\sqrt[m]{a}}{c^2}-\sqrt[n]{a}\right)\left(c^2\sqrt[m]{b}+\sqrt[n]{a}\right)$

рез.) $c^4\sqrt[m]{b^2}-\sqrt[n]{a^2}$

3) $\left\{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}:\left(\frac{a}{b}\right)^4}+\left(\sqrt[3]{a^7b^6}\right)^0}\right\}^3$

рез.) $\frac{b^6}{a^3}+\frac{3b^4}{a^2}+\frac{3b^2}{a}+1$

4) $\left\{\sqrt[12]{\left[\left(-\frac{a}{b}\right)^3\right]^{-4}}\right\}.\sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3}}.\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^3}}-\frac{2b}{a}$

рез.) $\frac{b}{a}\left(\sqrt[15]{\frac{b}{a^9}}-2\right)$

5) $\left\{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{4x^2}{a}}-\sqrt[4]{\frac{1}{a^4}}\right\}^3$

рез.) $x^6-\frac{6x^4}{a}+\frac{12x^2}{a^2}-\frac{8}{a^3}$

6) $\left\{\frac{\sqrt[m-2]{a^{\frac{n+2}{2}}:\left(\sqrt[m-2]{a}.\sqrt[n]{\frac{}{a^{m-2}}}\right)}}{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^{-1}}}}\right)^{30}}-1\right\}^2$

рез.) $\frac{1}{a^8b^4}-\frac{2}{a^4b^2}+1$

7) $$\frac{\left(\frac{a}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{b}}\right):\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a^2}}\right)^6}{\sqrt{\frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{a}{b}}}}$$

РЕЗ.) $\frac{a}{2}\sqrt[4]{\frac{a^3}{b}}$

8) $$\left[\left(a^3:\frac{\sqrt{b^2c}}{\sqrt[3]{-b^4}}\right)\cdot\sqrt[9]{-1}+\left(\frac{3a^2b}{\sqrt{c}}\right)^2\right]^{-2}$$

РЕЗ.) $1:\left(\frac{a^6c\sqrt[3]{b^2}+81a^8b^4}{c^2}-\frac{18a^7b^2}{c}\sqrt[6]{\frac{b^2}{c^5}}\right)$

9) $$\left\{\left[\left(\frac{a^2}{\sqrt{a}}:\frac{b}{\sqrt[3]{b^2}}\right)\cdot\left(1:\frac{z}{x}\sqrt[3]{\frac{a}{n}}\right)\right]^3-\left(\sqrt[4]{\frac{bx^2}{a^x}}\right)^6:\left(\sqrt[4]{\frac{b^3x^2}{a^{5x}}}\right)^2\right\}^2$$

РЕЗ.) $\frac{n^2x^6a^7}{b^2z^6}-\frac{2nx^5a^{3+x}\sqrt{a}}{bz^5}+a^{2x}x^4$

10) $$\left\{\left[\left(\sqrt[3]{-\frac{m}{x}}\right)^4:\sqrt[3]{-\left(\frac{m}{x}\right)^6}\right]^2\cdot\frac{\sqrt{mx}}{m^2}-n^2:\left[1:\sqrt[3]{\left(\frac{x}{n}\right)^2}\right]\right\}^{-2}$$

РЕЗ.) $$\frac{1}{\frac{x^5}{m^5}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{m}\right)^2}-\frac{2x^2n}{m^2}\sqrt[6]{\frac{n^2x^3}{m^5}}+n^2x\sqrt[3]{n^2x}}$$

11) $$\left\{\sqrt[2b-1]{\left[\sqrt[n]{\left(\frac{a^{5n}}{a^7}\right)^b}\cdot\left(\sqrt[n]{\frac{a^{5n}}{a^{-1}}}\right)^b\right]:\left(\sqrt{\sqrt[n]{a}}\right)^{2(4n-3)}}+\frac{2x^{-1}}{\left(\sqrt{\frac{c^3d}{m}}\right)^0}:\left[(-x)^{-3}\right]^{-5}\right\}^{-\frac{1}{m}}$$

РЕЗ.) $$\frac{1}{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{4n-5}}-\frac{2}{x^{16}}}}$$

12) $$\left\{\left(ab\sqrt{\frac{c}{b}}-\frac{b^2c^2\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right)^2:bc+(2ab^2c-b^4c^2)\right\}^{-n}$$

РЕЗ.) $\frac{1}{a^{2n}}$

13) $\left[\left(c\sqrt{\frac{a}{b^2c}}-\frac{c}{\sqrt{bc}}\right):\frac{\sqrt{c}}{b}-\sqrt{a}\right]:\sqrt[n]{b^m}$

рез.) $-\sqrt[2n]{b^{n-2m}}$

14) $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{\sqrt{-1}}:\frac{c}{b\sqrt{-d}}\right)^5\cdot\frac{a\sqrt{-b}}{c\sqrt{-d}}-2ab^2c^5:4\sqrt[3]{a^3bcd}\right]^{-1}$

рез.) $\frac{c^4\sqrt[3]{bcd}}{b^2[2a^4bd\sqrt[6]{b^5c^2d^2}-c^7]}$

15) $\left(\frac{-\sqrt[3]{c^{-1}d^5}}{\sqrt[3]{-1}}:\sqrt[5]{\frac{d^4}{c^5}}-\frac{(\sqrt{-1})^5}{-\sqrt{-1}}\right)^{-5}\cdot\frac{1}{(a+b)^{-1}}$

рез.) $\frac{a+b}{\sqrt[5]{d^5c^4}+3(\sqrt[15]{d^6c^8}+\sqrt[15]{d^5c^4})+1}$

16) $\left\{\left[\sqrt{\frac{(\sqrt{-a^2b})^{17}}{a^9\sqrt{b}}}-\sqrt[4]{-a}\right]:(a^2b^2+\sqrt[8]{a})(a^2b^2-\sqrt[8]{a})\right\}^2$

рез.) $\sqrt{-1}$

17) $\left\{\frac{\sqrt[4]{-a^4}}{\sqrt[4]{(-a)^4}}\cdot\sqrt{\frac{c}{\sqrt{-c}}}-\left[\frac{(\sqrt{-c})^5}{(\sqrt[5]{-c})^2}:\left(\sqrt{-1}:\frac{a}{\sqrt{-a}}\right)\right]^2\right\}^{-1}$

рез.) $\frac{1}{\sqrt[4]{c}+a\sqrt[3]{c^5}}$

18) $\left[\frac{\left\{\sqrt[3]{\sqrt{-1}}:\left(\sqrt[3]{\sqrt{-1}}\right)^5\right\}\cdot\sqrt{\sqrt[7]{-1}}}{\sqrt{\sqrt[9]{-1}}}+\sqrt{-1}\right]^{-5}$

рез.) $\frac{1}{-2(1-\sqrt{-1})}$

19) $\left[\left\{\sqrt{[x^2\sqrt[4]{(x^3\sqrt[5]{x^4})}]:\sqrt[3]{\sqrt{-x^6}}}\right\}^2:\left(\sqrt[3]{-\sqrt{-1}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt[20]{x^{19}}}\right]^2$

рез.) $x\sqrt[10]{x^9}-2+\frac{1}{x\sqrt[10]{x^9}}$

11. Задачи на освобожденіе знаменателей дробей отъ ирраціоналовъ 2-й степени.

1) $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

рез.) $1+\sqrt{2}$

2) $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

рез.) $4+\sqrt{2}$

3) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

рез.) $11+2\sqrt{30}$

4) $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

рез.) $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}-9\sqrt{3}-2\sqrt{60}$

5) $\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

рез.) $\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$

6) $\frac{A}{x\pm\sqrt{y}}$

рез.) $\frac{A(x\mp\sqrt{y})}{x^2-y}$

7) $\frac{\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}}$

рез.) $\frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$

8) $\frac{a+x+\sqrt{a^2+x^2}}{a+x-\sqrt{a^2+x^2}}$

рез.) $\frac{(a+x)\left\{a+\sqrt{a^2+x^2}\right\}+x^2}{ax}$

9) $\dfrac{b}{\sqrt[n]{[a-\sqrt{(a^2-b^n)}]}}$

рез.) $\sqrt[n]{[a+\sqrt{(a^2-b^n)}]}$

10) $\dfrac{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}{\sqrt{b}-m\sqrt{n}}$

рез.) $\dfrac{ab+c\sqrt{bd}+am\sqrt{bn}+cm\sqrt{dn}}{b-m^2n}$

11) $\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}}{\sqrt{1-z}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}}$

рез.) $\dfrac{\sqrt{1-z}}{1-z}$

12) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$

рез.) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}\right)}$

13) $\dfrac{3}{1+\sqrt{-2}}$

рез.) $1-\sqrt{-2}$

14) $\dfrac{4}{-1+\sqrt{-3}}$

рез.) $-1-\sqrt{-3}$

15) $\dfrac{4\sqrt{5}-20}{\frac{3}{2}\sqrt{-10}-5\sqrt{-\frac{1}{2}}}$

рез.) $2\sqrt{-10}+2\sqrt{-2}$

16) $\dfrac{\sqrt{-a}+\sqrt{-c}}{\sqrt{-a}-\sqrt{-c}}$

рез.) $\dfrac{a+2\sqrt{ac}+c}{a-c}$

17) $\dfrac{a}{a+\sqrt{-b^2}}$

рез.) $\dfrac{a^2}{a^2+b^2}-\dfrac{ab}{a^2+b^2}\sqrt{-1}$

18) $\dfrac{a+\sqrt{-b^2}}{a-\sqrt{-b^2}}$

рез.) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\sqrt{-1}$

19) $\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{-1}}$

рез.) $-\frac{8}{15}+\frac{4}{15}\cdot\sqrt{-1}$

20) $\dfrac{\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{4}\sqrt{-\frac{3}{4}}}$

рез.) $\frac{64}{259}+\frac{8}{259}\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{-1}$

12. Задачи на различныя преобразовки коренныхъ количествъ.

1) $\sqrt{ax}+\dfrac{ax}{a-\sqrt{ax}}$

рез.) $-\dfrac{a(x+\sqrt{ax})}{a-x}$

2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

рез.) $\dfrac{a+b}{a-b}$

3) $\sqrt{\left[1-\dfrac{a^2}{(a-b)^2}\right]}$

рез.) $\dfrac{\sqrt{(b^2-2ab)}}{a-b}$

4) $\frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{3cd}{x^2-2x+1}}$

РЕЗ.) $\frac{\sqrt{3cd}}{x+1}$

5) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+(a+b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}$

РЕЗ.) $2\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

6) $\frac{c\sqrt{c+d}}{\sqrt{c-d}}-\frac{d\sqrt{c-d}}{\sqrt{c+d}}-\frac{2d^2}{\sqrt{c^2-d^2}}$

РЕЗ.) $\sqrt{c^2-d^2}$

7) $\frac{2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

РЕЗ.) $\frac{3x^2-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

8) $\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{(a+x)}}+\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}+\frac{a\sqrt{(ax^3+x^4)}}{\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{(a^2-x^2)}$

РЕЗ.) $\frac{c\sqrt{(ax-x^2)}+(ax+d)\sqrt{(ax+x^2)}+x^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$

9) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}:(a^2-b^2)\sqrt{\frac{ac}{a^2-2ab+b^2}}$

РЕЗ.) $\sqrt{\frac{a-b}{ac}}$

10) $\frac{1}{\sqrt{-1}}\left\{\frac{\sqrt{-1}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}}\right\}$

РЕЗ.) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $\left\{\frac{1}{x-2}\sqrt{(x-2)(x^2+x-6)}\right\} : \left\{(x+1)\sqrt{\frac{x+2}{(x^2+3x+2)(x+1)}}\right\}$

рез.) $\sqrt{x+3}$

12) $(c+d)\sqrt[3]{\frac{(d-c)^3h^2}{(c-d)^2g^2}}$

рез.) $\frac{(d^2-c^2)h}{g}\sqrt[3]{\frac{g}{h}}$

13) $\frac{a^2\sqrt{bc}+b\sqrt{a^2bc}}{(a+\sqrt{-ab})(\sqrt{ab}-b\sqrt{-1})c}$

рез.) $\sqrt{\frac{a}{c}}$

14) $\frac{a}{2} \pm \frac{a(a-b)}{2\sqrt{(a-b)^2+c^2}} + \frac{b}{2} \mp \frac{b(a-b)}{2\sqrt{(a-b)^2+c^2}} \pm c \times$

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(a-b)^2}{4[(a-b)^2+c^2]}}$$

рез.) $\frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2+c^2}$

15) Доказать равенство выраженій:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} \text{ и } \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{-b}} \text{ и } \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b}-a}{2}} \cdot \sqrt{-1}$$

16) $\sqrt{[16+30\sqrt{-1}]}+\sqrt{[16-30\sqrt{-1}]}$

рез.) 10

17) $\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}$

рез.) $\sqrt{[2a-2\sqrt{(a^2-b^2)}]}$

18) $\sqrt[4]{-1}$

рез.) $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

19) $\sqrt{\frac{abf+c^2}{bc}+\sqrt{\frac{4af}{b}}}+\sqrt{\frac{abf+c^2}{bc}-\sqrt{\frac{4af}{b}}}$

рез.) $2\sqrt{\frac{af}{c}}$

20) $\sqrt{\frac{abc+1}{b}+2\sqrt{\frac{ac}{b}}}+\sqrt{\frac{abc+1}{b}-2\sqrt{\frac{ac}{b}}}$

рез.) $2\sqrt{ac}$

13. Задачи на извлеченіе квадратныхъ и кубичныхъ корней изъ многочленовъ.

1) $\sqrt{(a^2-ab+\frac{b^2}{4})}$
рез.) $a-\frac{b}{2}$

2) $\sqrt{(f^6+6f^3x^4+9x^8)}$
рез.) f^3+3x^4

3) $\sqrt{(\frac{25}{4}a^2b^2-\frac{5}{3}abc^2+\frac{1}{9}c^4)}$
рез.) $\frac{5}{2}ab-\frac{1}{3}c^2$

4) $\sqrt{(a^{2m}+2a^mx^n+x^{2n})}$
рез.) a^m+x^n

5) $\sqrt{(4a+12b\sqrt{ac}+9b^2c)}$
рез.) $2\sqrt{a}+3b\sqrt{c}$

6) $\sqrt{(4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16ab^2x+16b^4)}$
рез.) $2x^2+2ax+4b^2$

7) $\sqrt{(\frac{9}{4}+6x-17x^2-28x^3+49x^4)}$
рез.) $\frac{3}{2}+2x-7x^2$

8) $\sqrt{(16a+8ab\sqrt{-1}-ab^2-24c\sqrt{-a}+6bc\sqrt{a}-9c^2)}$
рез.) $4\sqrt{a}+b\sqrt{-a}-3c\sqrt{-1}$

9) $\sqrt{(a^2+x^2)}$

рез.) $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+$ и проч.

10) $\sqrt{(1-x)}$

рез.) $1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}-$ и проч.

11) $\sqrt[3]{(x^3+6x^2+12x+8)}$

рез.) $x+2$

12) $\sqrt[3]{(x^6-6cx^5+12c^2x^4-8c^3x^3)}$

рез.) x^2-2cx

13) $\sqrt[3]{(a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b)}$

рез.) $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$

14) $\sqrt[3]{(8-12x^{3n-1}+6x^{6n-2}-x^{9n-3})}$

рез.) $2-x^{3n-1}$

15) $\sqrt[3]{\left(b^3+\frac{3a^2b^2}{2c^2}x^{-2}+\frac{3a^4b}{4c^4}x^{-4}+\frac{a^6}{8c^6}x^{-6}\right)}$

рез.) $b+\frac{a^2}{2c^2}x^{-2}$

16) $\sqrt[3]{(27x^6-54ax^5+63a^2x^4-44a^3x^3+21a^4x^2-6a^5x+a^6)}$

рез.) $3x^2-2ax+a^2$

17) $\sqrt[3]{(8x^6+48cx^5+60c^2x^4-80c^3x^3-90c^4x^2+108c^5x-27c^6)}$

рез.) $2x^2+4cx-3c^2$

18) $\sqrt[3]{(8\sqrt[4]{-b^3}+12\sqrt{bc}-6c\sqrt[4]{-b}+c\sqrt{-c})}$

рез.) $2\sqrt[4]{-b}-\sqrt{-c}$

19) $\sqrt[3]{(a^3+x^3)}$

рез.) $a+\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^6}{9a^5}+\frac{5x^9}{81a^8}-\frac{10x^{12}}{243a^{11}}+$ и проч.

20) $\sqrt[3]{(1-x)}$

рез.) $1-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}-\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}-$ и проч.

14. Задачи на Нютоновъ Биномъ.

1) $(a+b)^9$

рез.) $a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9$

2) $(\frac{1}{2}x+2y)^7$

рез.) $\frac{1}{128}x^7+\frac{7}{32}x^6y+\frac{21}{8}x^5y^2+\frac{35}{2}x^4y^3+70x^3y^4+168x^2y^5+224xy^6+128y^7$

3) $\left(\frac{2ac}{5}+3b\right)^5$

рез.) $\frac{32a^5c^5}{3125}+\frac{48a^4c^4b}{125}+\frac{144a^3c^3b^2}{25}+\frac{216a^2c^2b^3}{5}+162ab^4c+243b^5$

4) $\left(3ab^2c-\frac{2d}{3}\right)^6$

рез.) $729a^6b^{12}c^6-972a^5b^{10}c^5d+540a^4b^8c^4d^2-160a^3b^6c^3d^3+\frac{80a^2b^4c^2d^4}{3}-\frac{64ab^2cd^5}{27}+\frac{64d^6}{729}$

5) $(2\sqrt{a}+b)^5$

рез.) $32a^2\sqrt{a}+80a^2b+80ab^2\sqrt{a}+40ab^3+10b^4\sqrt{a}+b^5$

6) $(1-x^2)^{-2}$

рез.) $1+2x^2+3x^4+4x^6+5x^8+$ и проч.

7) $(3\sqrt[3]{a}-2\sqrt{a})^{-2}$

рез.) $\frac{1}{9\sqrt[3]{a^2}}+\frac{4}{27\sqrt{a}}+\frac{4}{27\sqrt[3]{a}}+\frac{32\sqrt{a}}{243\sqrt[3]{a^2}}+$ и проч.

8) $(a+b\sqrt{-1})^{-1}$

рез.) $\frac{1}{a}\left(1-\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{b^6}{a^6}+\text{и проч.}\right)-\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^5}{a^5}-\frac{b^7}{a^7}+\text{и проч.}\right)\sqrt{-1}$

9) $(2a-3\sqrt{-1})^{-4}$

рез.) $\frac{1}{16a^4}+\frac{12\sqrt{-1}}{32a^5}-\frac{90}{64a^6}-\frac{540\sqrt{-1}}{128a^7}+\frac{2835}{256a^8}+$ и проч.

10) $\frac{7}{3+2x}$

рез.) $\frac{7}{3}[1-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{27}x^3+\frac{16}{81}x^4-\frac{32}{243}x^5+$ и проч.$]$

11) $\sqrt{x^4+\frac{1}{2}a}$

рез.) $x^2+\frac{a}{4x^2}-\frac{a^2}{32x^6}+\frac{a^3}{128x^{10}}-\frac{5a^4}{2048x^{14}}$ и проч.

12) $\sqrt[3]{1+x^3}$

рез.) $1+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^6+\frac{5}{81}x^9-\frac{10}{243}x^{12}$ и проч.

13) $6\sqrt[3]{[2-x^2]^2}$

рез.) $\sqrt[3]{4}\left[6-2x^2-\frac{x^4}{6}-\frac{x^6}{27}-\frac{7x^8}{648}\right.$ —и проч.$\left.\right]$

14) $7\sqrt[4]{[4x^3+\frac{3}{5}]^3}$

рез.) $7\sqrt{2\sqrt{x}}\left[2x^2+\frac{9}{40x}-\frac{27}{6400x^4}+\frac{27}{102400x^7}\right.$ — и проч.$\left.\right]$

15) $5x^2\sqrt[7]{[2x^4-6]^3}$

рез.) $5x^2\sqrt[7]{32x^6}\left[x^2-\frac{15}{7x^2}-\frac{45}{49x^6}-\frac{405}{343x^{10}}\right.$ — и проч.$\left.\right]$

16) $\sqrt{(2\sqrt[3]{x}+1)^3}$

рез.) $\sqrt{2x}\left[2+\frac{3}{2\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{16\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{64x}+\right.$ и проч.$\left.\right]$

17) $\frac{3}{\sqrt[4]{2-x^3}}$

рез.) $\frac{3}{\sqrt[4]{2}}\left[1+\frac{x^3}{8}+\frac{5x^6}{128}+\frac{15x^9}{1024}+\right.$ и проч.$\left.\right]$

18) $\frac{14a}{\sqrt[3]{[7a-3x^2]^4}}$

рез.) $\frac{2}{\sqrt[3]{7a}}\left[1+\frac{4x^2}{7a}+\frac{2x^4}{7a^2}+\frac{20x^6}{147a^3}+\right.$ и проч.$\left.\right]$

19) $\frac{5x^3}{8\sqrt[3]{[2-\sqrt{x}]^2}}$

рез.) $\frac{5x^3}{8\sqrt[3]{4}}\left[1+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{5x}{36}+\frac{5x\sqrt{x}}{81}+\text{и проч.}\right]$

20) $\frac{2\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{\sqrt[5]{\frac{1}{x^6}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x^4}}}}$

рез.) $2x[1+\frac{1}{2}\sqrt[5]{x^2}+\frac{3}{8}\sqrt[5]{x^4}+\frac{5}{16}x\sqrt[5]{x}+\text{и проч.}]$

21) $\left(3a-5b-\frac{2c}{3}\right)^4$

рез.) $81a^4-540a^3b-72a^3c+1350a^2b^2+360a^2bc+24a^2c^2-1500ab^3-600ab^2c-80abc^2-\frac{32}{9}ac^3+625b^4+\frac{1000}{3}b^3c+\frac{200}{3}b^2c^2+\frac{160}{27}bc^3+\frac{16}{81}c^4$

22) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^3$

рез.) $(a+3b+3c)\sqrt{a}+(b+3a+3c)\sqrt{b}+(c+3a+3b)\sqrt{c}+6\sqrt{abc}$

23) $(1-\sqrt{-1}+\sqrt{-2})^4$

рез.) $-8(3+2\sqrt{2})\sqrt{-1}$

24) $\frac{7}{\sqrt[3]{[2-3x+5x^2]^2}}$

рез.) $\frac{7}{\sqrt[3]{4}}\left[1+x-\frac{5}{12}x^2-\frac{5}{2}x^3-\frac{185}{72}x^4+\text{и проч.}\right]$



ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

1. *Задачи на рѣшеніе уравненій 1-й степени съ одною неизвѣстною.*

1) $24-3x=16x+5$

рѣш.) $x=1$

2) $ax+b=cx+d$

рѣш.) $x=\frac{d-b}{a-c}$

3) $2x+4-\frac{1}{2}x=25-2x$

рѣш.) $x=6$

4) $a-1=\frac{a^2-1}{x}$

рѣш.) $x=a+1$

5) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x-9=\frac{1}{3}x-8-\frac{1}{6}x$

рѣш.) $x=12$

6) $\frac{x}{an+bn}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}$

рѣш.) $x=a^2-b^2$

7) $12\frac{1}{4}+3x-6-\frac{7x}{3}=\frac{3x}{4}-5\frac{3}{8}$

рѣш.) $x=139\frac{1}{2}$

8) $m-\frac{a+b}{x}=n-\frac{a-b}{x}$

рѣш.) $x=\frac{2b}{m-n}$

9) $\frac{7x+3}{4}+5x=20+\frac{4x-5}{7}$

рѣш.) $x=3$

10) $\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2} - x\right)\right] = -n$

рѣш.) $x = \frac{3n}{2}$

11) $\frac{3x+5}{11} = \frac{12-x}{5} + 3 - 2x$

рѣш.) $x = 2$

12) $a - \frac{n}{x} = b$

рѣш.) $x = \frac{n}{a-b}$

13) $\frac{8x+4}{11} - \frac{7x+3}{2} = \frac{32-4x}{3} - \frac{5x+13}{2}$

рѣш.) $x = 5$

14) $m - \frac{x}{a-c} = n - \frac{x}{c-a}$

рѣш.) $x = \frac{(m-n)(a-c)}{2}$

15) $\frac{27+4x}{9} - \frac{3x-4}{3} = 5\frac{1}{3} - \frac{4x-6}{5}$

рѣш.) $x = 9$

16) $a - (a-n)x = b + (b+n)x$

рѣш.) $x = \frac{a-b}{a+b}$

17) $\frac{3x-5}{7} : \frac{10+x}{5} = \frac{5}{14}$

рѣш.) $x = 4$

18) $a - m(a+c)x = b + c(a-m)x$

рѣш.) $x = \frac{a-b}{a(m+c)}$

19) $(16x+5) : \frac{4x+14}{9x+31} = 36x + 10$

рѣш.) $x = 5$

20) $\dfrac{x^2}{(1+\frac{1}{4}x)(1+\frac{4}{3}x)}=3$

рѣш.) $x=-\frac{12}{19}$

21) $5x+\dfrac{6x+9}{4x+3}=9+\dfrac{10x^2-18}{2x+3}$

рѣш.) $x=0$

22) $\dfrac{x}{a}-1-\dfrac{dx}{c}+3ab=0$

рѣш.) $x=\dfrac{ac(1-3ab)}{c-ad}$

23) $\dfrac{3x}{5}-\dfrac{7x}{10}+\dfrac{3x}{4}-\dfrac{7x}{8}=-15$

рѣш.) $x=66\frac{2}{3}$

24) $x=a+\dfrac{bc}{d}+\dfrac{cfx}{de}$

рѣш.) $x=\dfrac{(ad+bc)e}{de-cf}$

25) $\dfrac{4x}{3}+\dfrac{2x-7}{4}=\dfrac{5x}{6}+\dfrac{x+2}{8}+3\frac{1}{4}$

рѣш.) $x=6$

26) $\dfrac{a(d^2+x^2)}{dx}=ac+\dfrac{ax}{d}$

рѣш.) $x=\dfrac{d}{c}$

27) $3{,}4x=0{,}8+x$

рѣш.) $x=\frac{1}{3}$

28) $5-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{3x}-16=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{5}{3x}-10{,}9$

рѣш.) $x=8\frac{1}{3}$

29) $a\left(1+\dfrac{a}{x}\right)=x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2a}{x}+\dfrac{a^2}{x^2}\right)$

рѣш.) $x=0$

30) $\frac{12+2x}{x+3}+\frac{4x-3}{1+2x}=\frac{4x-1}{x-1}$

рѣш.) $x=37$

31) $n-\frac{nx+n}{x+n}=\frac{n}{x+n}-n$

рѣш.) $x=2(1-n)$

32) $\left(\frac{0{,}333 \text{ и проч.}}{x}+6\right)5=40$

рѣш.) $x=\frac{1}{6}$

33) $(a-x)(b+x)=(2a+x)(b-x)$

рѣш.) $x=\frac{ab}{3a-2b}$

34) $(\frac{17}{2}-x)2=9{,}295454$ и проч.

рѣш.) $x=3\frac{75}{88}$

35) $a+x=\frac{2ab-x^2}{b-x}$

рѣш.) $x=\frac{ab}{b-a}$

36) $3{,}25x-5{,}007-x=0{,}2-0{,}34x$ А.А.

рѣш.) $x=2\frac{27}{2590}$

37) $\frac{n+1}{x}=\frac{n+1}{n-x}+\frac{1}{x}$

рѣш.) $x=\frac{n^2}{2n+1}$

38) $4-\left(\frac{3x-1}{4}-\frac{2x-10}{3}\right)=1-\left(\frac{5x-6}{7}-\frac{2(2x-7)}{5}\right)$

рѣш.) $x=11$

39) $ax-\frac{bx-b}{2a}+\frac{b-ab}{a}=\frac{2a^2+b}{2a}+\frac{abx+b}{a}-\frac{bx}{2a}$

рѣш.) $x=\frac{a+b}{a-b}$

40) $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}=1+\frac{1}{3x}-\frac{1}{4x}$

рѣш.) $x=\frac{5}{12}$

41) $\frac{cx^m}{a+bx}=\frac{gx^m}{d+hx}$

рѣш.) $x=\frac{cd-ag}{bg-ch}$

42) $x(x-4)+\frac{1}{x}=\frac{x^3+1}{x}+5(n-x)$

рѣш.) $x=5n$

43) $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$

рѣш.) $x=\frac{ac}{b}$

44) $\frac{x^4-1}{x-1}-(x^3-5)=2+(1+x)^2$

рѣш.) $x=3$

45) $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$

рѣш.) $x=\frac{ab}{a+b}$

46) $\frac{7x^n}{x-1}=\frac{6x^{n+1}+x^n}{x+1}-\frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}$

рѣш.) $x=-\frac{11}{12}$

47) $\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{a}{a^2-x^2}$

рѣш.) $x=\frac{1}{4}$

48) $\frac{x}{a}-\frac{1}{1-\frac{a^2}{c^2}}=\frac{1}{\frac{a}{c}-\frac{c}{a}}$

рѣш.) $x=\frac{ac}{a+c}$

49) $\left\{a+x-\frac{a^2}{a+x}\right\}:(a+x)=1-\frac{2ax}{(a+x)^2}$

рѣш.) $x=\frac{a}{2}$

50) $\left(2a-\frac{cx}{a^2-c^2}\right)\left[(a+c)^2-2ac\right]=\left(a-\frac{x}{a-c}\right)\left[(a-c)^2+2ac\right]$

рѣш.) $x=c^2-a^2$

51) $\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}-\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$

рѣш.) $x=\frac{5a(2b-a)}{3c-d}$

52) $\frac{a}{a+x}+\frac{\left(1+\frac{x^2}{a}\right)}{1-\frac{x}{a}}-\frac{a-x+c}{a+x-c}=\frac{x\left(x+1\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)}{a-\frac{x^2}{a}}+\frac{a-x}{\left(a+x\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)}$

рѣш.) $x=c$

53) $1+x+x^2+x^3+x^4=\frac{1-a^5}{1-x}$

рѣш.) $x=a$

54) $\sqrt[m]{ax+b}=\sqrt[m]{cx+d}$

рѣш.) $x=\frac{d-b}{a-c}$

55) $\sqrt{x+12}=2+\sqrt{x}$

рѣш.) $x=4$

56) $\sqrt{x-24}=\sqrt{x}-2$

рѣш.) $x=49$

57) $\sqrt{4a+x}=2\sqrt{b+x}-\sqrt{x}$

рѣш.) $x=\frac{(a-b)^2}{2a-b}$

58) $-1+\sqrt[5]{5x+24}=3$

рѣш.) $x=8$

59) $\frac{x-ax}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$

рѣш.) $x=\frac{1}{1-a}$

60) $\frac{ax-b^2}{b+\sqrt{ax}}=\frac{\sqrt{ax}-b}{c}+c$

рѣш.) $x=\frac{1}{a}\left(b+\frac{c^2}{c-1}\right)^2$

61) $\sqrt[m]{(a+x)}=\sqrt[2m]{(x^2+5ax+b^2)}$

рѣш.) $x=\frac{a^2-b^2}{3a}$

62) $\sqrt{5+x}+\sqrt{x}=\frac{15}{\sqrt{5+x}}$

рѣш.) $x=4$

63) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

рѣш.) $x=1\frac{9}{16}$

64) $\sqrt{3+4\sqrt{x}+\sqrt{49+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{x}-2}=\frac{4}{2-\sqrt{x}}$

рѣш.) $x=24$

65) $\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\sqrt{b+2\sqrt{ax}+\sqrt{(a+b)^2+x^2}}-\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$

рѣш.) $x=\frac{2ab}{a-b}$

2. Задачи на рѣшеніе уравненій 1-й степени со многими неизвѣстными.

1) $3x+2y=118$

$x+5y=191$

рѣш.) $x=16,\ y=35$

2) $5x+4y=58$

$3x+7y=67$

рѣш.) $x=6,\ y=7$

3) $11x+3y=100$

$7x-5y=36$

рѣш.) $x=8$, $y=4$

4) $\frac{1}{7}x-9=90-7y$

$7x-21=30-\frac{1}{7}y$

рѣш.) $x=7$, $y=14$

5) $9x=70-\frac{8y}{5}$

$44=7y-\frac{13x}{3}$

рѣш.) $x=6$, $y=10$

6) $13x+7y-341=7\frac{1}{2}y+43\frac{1}{2}x$

$2x+\frac{1}{2}y=1$

рѣш.) $x=-12$, $y=50$

7) $\frac{2x+3y}{6}=8-\frac{x}{3}$

$\frac{7y-3x}{2}-y=11$

рѣш.) $x=6$, $y=8$

8) $\frac{3}{x}-\frac{5}{y}=\frac{1}{8}$

$\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=\frac{3}{8}$

рѣш.) $x=4$, $y=8$

9) $\frac{5}{x}-\frac{2}{y}=17$

$\frac{16}{x}-\frac{5}{y}=60$

рѣш.) $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{1}{4}$

10) $\frac{xy}{x+3}=y-1$

$\frac{x+2}{xy}=\frac{1}{y+1}$

рѣш.) $x=-2\frac{2}{5}$, $y=\frac{1}{5}$

11) $\frac{xy}{x+4} = y-1$

$\frac{xy}{y-2} = x+1$

рѣш.) $x = -\frac{4}{7}$, $y = \frac{6}{7}$

12) $x^2 - y^2 = 44$

$x+y = 22$

рѣш.) $x = 12$, $y = 10$

13) $x+y = 18{,}73$

$0{,}56x + 13{,}421y = 763{,}4$

рѣш.) $x = -39{,}8121$ и проч., $y = 58{,}5421$ и проч.

14) $(x+5)(y+7) = (x+1)(y-9) + 112$

$2x + 10 = 3y + 1$

рѣш.) $x = 3$, $y = 5$

15) $\frac{7x+6}{11} + \frac{4y-9}{3} = 3x - \frac{13-x}{2} - \frac{3y-x}{5}$

$\frac{3x+4}{2y-3} = \frac{5}{3}$

рѣш.) $x = 7$, $y = 9$

16) $2y - \frac{3+x}{4} = 7 + \frac{3x-2y}{5}$

$4x - \frac{8-y}{3} = 24\frac{1}{2} - \frac{2x+1}{2}$

рѣш.) $x = 5$, $y = 5$

17) $ax = by$

$x+y = c$

рѣш.) $x = \frac{bc}{a+b}$, $y = \frac{ac}{a+b}$

18) $ax + by = c$

$fx + gy = h$

рѣш.) $x = \frac{cg-bh}{ag-bf}$, $y = \frac{ah-cf}{ag-bf}$

19) $\dfrac{a}{b+y}=\dfrac{b}{3a+x}$

$ax+2by=d$

рѣш.) $x=\dfrac{2b^2-6a^2+d}{3a},\ y=\dfrac{3a^2-b^2+d}{3b}$

20) $bcx=cy-2b$

$b^2y+\dfrac{a(c^3-b^3)}{bc}=\dfrac{2b^3}{c}+c^3x$

рѣш.) $x=\dfrac{a}{bc},\ y=\dfrac{a+2b}{c}$

21) $3x+5y=\dfrac{(8b-2c)bc}{b^2-c^2}$

$b^2x-\dfrac{bc^2d}{b+c}+(b+c+d)cy=c^2x+(b+2c)bc$

рѣш.) $x=\dfrac{bc}{b-c},\ y=\dfrac{bc}{b+c}$

22) $2ax+3by=(2a+3b^2)a$

$5y-5ab=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$

рѣш.) $x=a,\ y=ab$

23) $\dfrac{a+x}{\sqrt{x^2+y}}-\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2+y}=0$

$(n-1)ay=n^4-1$

рѣш.) $x=\dfrac{n^3+n^2+n+1}{a^2},\ y=\dfrac{n^3+n^2+n+1}{a}$

24) $x+y+z=9$

$x+2y+3z=16$

$x+3y+4z=21$

рѣш.) $x=4,\ y=3,\ z=2$

25) $x+y+z=12$

$x+2y+3z=20$

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+z=6$

рѣш.) $x=6,\ y=4,\ z=2$

26) $3x+5y=161$
$7x+2z=209$
$2y+z=89$
рѣш.) $x=17$, $y=22$, $z=45$

27) $y+\frac{1}{2}x=41$
$x+\frac{1}{4}z=20\frac{1}{2}$
$y+\frac{1}{5}z=34$
рѣш.) $x=18$, $y=32$, $z=10$

28) $\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z=6\frac{1}{2}$
$\frac{3}{5}x+y+\frac{8}{5}z=17$
$5x+7y+12z=127$
рѣш.) $x=3$, $y=4$, $z=7$

29) $2x-\frac{3}{4}y=93-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y$
$7x-5z=y+x-86$
$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=58$
рѣш.) $x=48$, $y=54$, $z=64$

30) $53-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z=y-109$
$\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}y=26$
$5y=4z$
рѣш.) $x=64$, $y=80$, $z=100$

31) $18x-7y-5z=11$
$4\frac{2}{5}y-\frac{2}{3}x+z=108$
$3\frac{1}{2}z+2y+\frac{3}{4}x=80$
рѣш.) $x=12$, $y=25$, $z=6$

32) $x+y+z=a$
$x+y-z=b$
$x-y+z=c$
рѣш.) $x=\frac{b+c}{2}$, $y=\frac{a-c}{2}$, $z=\frac{a-b}{2}$

33) $x+y+z=26$
$x-y=4$
$x-z=6$
рѣш.) $x=12$, $y=8$, $z=6$

34) $x+y+z=a$
$my=nx$

$pz=qx$

рѣш.) $x=\frac{amp}{mp+np+mq}, y=\frac{anp}{mp+np+mq}, z=\frac{amq}{mp+np+mq}$

35) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b$

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c$

рѣш.) $x=\frac{2}{a+b-c}, y=\frac{2}{a+c-b}, z=\frac{2}{b+c-a}$

36) $\frac{2}{x}-\frac{5}{3y}+\frac{1}{z}=3\frac{4}{72}$

$\frac{1}{4x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=6\frac{11}{72}$

$\frac{5}{6x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{z}=12\frac{1}{36}$

рѣш.) $x=6, y=9, z=\frac{1}{3}$

37) $\frac{xy}{ay+bx}=k$

$\frac{yz}{cz+dy}=m$

$\frac{xz}{gz+fx}=n$

рѣш.) $x=\frac{kmn(bdg+acf)}{cfmn-bfkn+bdkm}, y=\frac{kmn(bdg+acf)}{afkn+dgmn-adkm},$

$z=\frac{kmn(bdg+acf)}{bgkn-cgmn+ackm}$

38) $x+y+z+v=1$

$16x+8y+4z+2v=9$

$81x+27y+9z+3v=36$

$256x+64y+16z+4v=100$

рѣш.) $x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{4},\ v=0$

39) $x+y+z=6$
$x+3y+v=11$
$2x+2z+v=12$
$v-x-y=1$
рѣш.) $x=1,\ y=2,\ z=3,\ v=4$

40) $x-9y+3z-10v=21$
$2x+7y-z-v=683$
$3x+y+5z+2v=195$
$4x-6y-2z-9v=516$
рѣш.) $x=100, y=60, z=-13, v=-50$

41) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=58$
$\frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76$
$\frac{x}{2}+\frac{3z}{8}+\frac{v}{5}=79$
$y+z+v=248$
рѣш.) $x=12,\ y=30,\ z=168,\ v=50$

3. Задачи на уравненія квадратныя съ одною неизвѣстною величиною.

1) $x^2-19=89-2x^2$
рѣш.) $x'=6,\ x''=-6$

2) $x^2+ab=5x^2$
рѣш.) $x'=\frac{1}{2}\sqrt{ab},\ x''=-\frac{1}{2}\sqrt{ab}$

3) $\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+b^2}-\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-b^2}=b$
рѣш.) $x'=\frac{2a\sqrt{5}}{5b},\ x''=-\frac{2a\sqrt{5}}{5b}$

4) $x-\frac{1}{2x}=\frac{3}{4}\ x-\frac{1}{x}$
рѣш.) $x'=(1{,}414 \text{ и проч.})\sqrt{-1}, x''=-(1{,}414 \text{ и проч.})\sqrt{-1}$

5) $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{x}{b}}$

рѣш.) $x'=2\sqrt{(a-b)b}$, $x''=-2\sqrt{(a-b)b}$

6) $4x-\frac{2}{3x}=\frac{1}{2x}+3x$

рѣш.) $x'=1{,}080$ и проч., $x''=-1{,}080$ и проч.

7) $x^2+6x=27$

рѣш.) $x'=3$, $x''=-9$

8) $x^2-7x+3\frac{1}{4}=0$

рѣш.) $x'=6\frac{1}{2}$, $x''=\frac{1}{2}$

9) $x^2-40=x+170$

рѣш.) $x'=15$, $x''=-14$

10) $adx-acx^2=bcx-bd$

рѣш.) $x'=\frac{d}{c}$, $x''=-\frac{b}{a}$

11) $18=x^2-5\frac{3}{4}x$

рѣш.) $x'=8$, $x''=-2\frac{1}{4}$

12) $\left(\frac{ax}{b}\right)^2-\frac{2ax}{c}+\frac{b^2}{c^2}=0$

рѣш.) $x=\frac{b^2}{ac}$

13) $x-x^2+1=0$

рѣш.) $x'=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x''=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

14) $0=14+8x-x^2$

рѣш.) $x'=9{,}4772$ и проч. $x''=-1{,}4772$ и проч.

15) $x=7-3x^2$

рѣш.) $x'=1{,}3699$ и проч., $x''=-1{,}7032$ и проч.

16) $-65+3x^2=2x$

рѣш.) $x'=5$, $x''=-4\frac{1}{3}$

17) $(a+x)(n+x)=(n-x)(2a+x)$

рѣш.) $x'=\frac{\sqrt{a(9a+8n)}-3a}{4}$, $x''=-\frac{3a+\sqrt{a(9a+8n)}}{4}$

18) $6x-30=3x^2$

рѣш.) $x'=1+3\sqrt{-1}, x''=1-3\sqrt{-1}$

19) $\frac{x^2}{4}-x+25=0$

рѣш.) $x'=2+\sqrt{-96},\ x''=2-\sqrt{-96}$

20) $h-\frac{x}{x+1}=(h-n)-\frac{x}{x-1}$

рѣш.) $x'=\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n},\ x''=-\frac{1+\sqrt{n^2+1}}{n}$

21) $17+8x=-x^2$

рѣш.) $x'=-4+\sqrt{-1},\ x''=-4-\sqrt{-1}$

22) $4x-\frac{36-x}{x}=46$

рѣш.) $x'=12,\ x''=-\frac{3}{4}$

23) $\frac{b}{x^2}=\frac{c}{(a-x)^2}$

рѣш.) $x'=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}},\ x''=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

24) $5x-\frac{3x-3}{x-3}=2x+\frac{3x-6}{2}$

рѣш.) $x'=4,\ x''=-1$

25) $\frac{10}{x}=\frac{14-2x}{x^2}+\frac{22}{9}$

рѣш.) $x'=3,\ x''=\frac{21}{11}$

26) $abx^2+\frac{3a^2x}{c}=\frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2}-\frac{b^2x}{c}$

рѣш.) $x'=\frac{2a-b}{ac},\ x''=-\frac{3a+2b}{bc}$

27) $\frac{3x-4}{x-4}+1=10-\frac{x-2}{2}$

рѣш.) $x'=12,\ x''=6$

28) $\dfrac{7}{3x-5}=\dfrac{x}{60+x}$

рѣш.) $x'=14,\ x''=-10$

29) $\dfrac{ab}{x}-2cx+3d=\dfrac{2n}{x}-4x+1$

рѣш.) $x'=-\dfrac{3d-1}{8-4c}+\sqrt{\left(\dfrac{3d-1}{8-4c}\right)^2-\dfrac{ab-2n}{4-2c}}$,

$$x''=-\frac{3d-1}{8-4c}-\sqrt{\left(\frac{3d-1}{8-4c}\right)^2-\frac{ab-2n}{4-2c}}$$

Полагая въ выводѣ: $d=1, c=2, a=3, b=4$, и $n=6$, найдемъ:

$x'=0,\ x''=-2\infty$

30) $\dfrac{8x}{x+2}-6=\dfrac{20}{3x}$

рѣш.) $x'=10,\ x''=-\frac{2}{3}$

31) $-5=\dfrac{48}{x+3}-\dfrac{165}{x+10}$

рѣш.) $x'=5\frac{2}{5},\ x''=5$

32) $(a+b)x^2-cx=\dfrac{ac}{a+b}$

рѣш.) $x'=\dfrac{c+\sqrt{(4a+c)c}}{2(a+b)},\ x''=\dfrac{c-\sqrt{(4a+c)c}}{2(a+b)}$

33) $\dfrac{31}{6x}-\dfrac{16}{117-2x}=1$

рѣш.) $x'=67\frac{1}{6},\ x''=4\frac{1}{2}$

34) $\dfrac{2x+3}{10-x}-\dfrac{2x}{25-3x}+6\frac{1}{2}=0$

рѣш.) $x'=13\frac{22}{31},\ x''=8$

35) $\dfrac{(2c+ad)c}{d^2}-(a-b)(2c+ad)\dfrac{x}{d}=\dfrac{(a+b)cx}{d}-(a^2-b^2)x^2$

рѣш.) $x'=\dfrac{2c+ad}{d(a+b)},\ x''=\dfrac{c}{d(a-b)}$

36) $\frac{3}{5}+\frac{25x+180}{10x-81}=\frac{40x}{5x-8}$

рѣш.) $x'=14\frac{3}{5},\ x''=\frac{72}{245}$

37) $\frac{x}{5+x}+\frac{7}{6-4x}=\frac{11x}{11x-8}$

рѣш.) $x'=1,\ x''=-\frac{40}{47}$

38) $4a^{m+3}c^{n-1}(ac^3-2)x=a^7c^{n+2}x^2-32a^{2m}c^{n-1}$

рѣш.) $x'=4a^{m-3},\ x''=-\frac{8a^{m-4}}{c^3}$

39) $\frac{65}{4(3-x)}=\frac{20x+9}{19-7x}+\frac{18+x}{6(x-3)}$

рѣш.) $x'=7\frac{22}{113},\ x''=2\frac{1}{2}$

40) $b^2+6a^3b^2x=9a^4b^4x^2$

рѣш.) $x'=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{3a^2b^2},\ x''=\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{3a^2b^2}$

41) $\frac{1}{x^2-3x}+\frac{1}{x^2+4x}=\frac{9}{8x}$

рѣш.) $x'=4,\ x''=-3\frac{2}{9}$

42) $\frac{ab}{(a-b)^2}\,x^2-\frac{2(a+b)\sqrt{ab}}{(a-b)^2}x-1=0$

рѣш.) $x'=\frac{a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}}{\sqrt{ab}},\ x''=\frac{a+b-\sqrt{2(a^2+b^2)}}{\sqrt{ab}}$

43) $\frac{x^3-10x^2+1}{x^2-6x+9}=x-3$

рѣш.) $x'=1,\ x''=-28$

44) $\frac{a(x^2-a)}{b-c}=(c-b)\left(1-\frac{2x\sqrt{a}}{b-c}\right)$

рѣш.) $x'=\frac{b-c+a}{\sqrt{a}},\ x''=\frac{b-c-a}{\sqrt{a}}$

45) $\frac{x}{7-x}+\frac{7-x}{x}=2\frac{9}{10}$

рѣш.) $x'=5,\ x''=2$

46) $\frac{cx^2}{\sqrt{d}} - 2cx = x^2\sqrt{d} - c\sqrt{d}$

рѣш.) $x' = \frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c} - \sqrt{d}}$, $x'' = \frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c} + \sqrt{d}}$

47) $x = \frac{9cd^2 - 4a^2}{4a(ac^2 + bd^2)} x^2 - \frac{ac^2 + bd^2}{4a}$

рѣш.) $x' = -\frac{ac^2 + bd^2}{2a - 3d\sqrt{c}}$, $x'' = -\frac{ac^2 + bd^2}{2a + 3d\sqrt{c}}$

48) $ab^3x^2 + (1+c)bd\sqrt{c} + cb^2x^2 = [b^3d\sqrt{c} + (ab+c)(1+c)]x$

рѣш.) $x' = \frac{bd\sqrt{c}}{ab + c}$, $x'' = \frac{1+c}{b^2}$

49) $\frac{5a + 10ab^2}{9b^2 - 3a^2b^2} x^2 - \left[\frac{5\sqrt{(a+b)}}{3b^3} + \frac{(1+2b^2)cd\sqrt{c}}{3 - a^2}\right] x + \frac{cd}{ab}\sqrt{(a+b)c} = 0$

рѣш.) $x' = \frac{(3 - a^2)\sqrt{(a+b)}}{ab(1 + 2b^2)}$, $x'' = \frac{3b^2cd\sqrt{c}}{5a}$

50) $ax = b \pm \sqrt{cx}$

рѣш.) $x' = \frac{2ab + c + \sqrt{(4ab + c)c}}{2a^2}$, $x'' = \frac{2ab + c - \sqrt{(4ab + c)c}}{2a^2}$

51) $\sqrt{x}\sqrt{16 + x} = 15$

рѣш.) $x' = 9, x'' = -25$

52) $\sqrt{5 + x}\,\sqrt{12 + x} = 12$

рѣш.) $x' = 4, x'' = -21$

53) $\frac{2 + \sqrt{4x}}{4 + \sqrt{x}} = \frac{4 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

рѣш.) $x' = 7\frac{1}{9}$, $x'' = 4$

54) $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x+1}}$

рѣш.) $x' = 4$, $x'' = -25$

55) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x - 18} = \sqrt{7x + 1}$

рѣш.) $x' = 9$, $x'' = -3\frac{3}{5}$

56) $\frac{123+41\sqrt{x}}{5\sqrt{x}-x}=\frac{20\sqrt{x}+4x}{3-\sqrt{x}}-\frac{2x^2}{(5\sqrt{x}-x)(3-\sqrt{x})}$

рѣш.) $x'=20\frac{1}{2}$, $x''=3$

57) $x^4+1225=74x^2$

рѣш.) $x'=\pm 7$, $x''=\pm 5$

58) $3x^6+42x^3=3321$

рѣш.) $x'=3$, $x''=-\sqrt[3]{41}$

59) $ax^{2n}+bx^n=c$

рѣш.) $x'=\sqrt[n]{\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}}$, $x''=\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}}$

60) $\frac{x^4}{2}(a+b)=x^2+a$

рѣш.) $x'=\pm\sqrt{\frac{1}{a+b}+\sqrt{\left[\frac{2a}{a+b}+\frac{1}{(a+b)^2}\right]}}$,

$x''=\pm\sqrt{\frac{1}{a+b}-\sqrt{\left[\frac{2a}{a+b}+\frac{1}{(a+b)^2}\right]}}$

4. Задачи на разложенiе трехчленовъ второй степени на производителей степени первой.

1) x^2+ax+b

рез.) $\left[x+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right]\left[x+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right]$

2) x^2+x+1

рез.) $\left(x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$

3) x^2-8x-2

рез.) $[x-(4+3\sqrt{2})][x-(4-3\sqrt{2})]$

4) $x^2+\frac{2}{21}x-\frac{1}{7}$

рез.) $(x+\frac{3}{7})(x-\frac{1}{3})$

5) px^2+qx+n

рез.) $\left(x+\dfrac{q+\sqrt{q^2-4np}}{2p}\right)\left(x+\dfrac{q-\sqrt{q^2-4np}}{2p}\right)$

6) $55x^2-58x+15$

рез.) $55(x-\frac{5}{11})(x-\frac{3}{5})$

7) $9x^2-12x+8$

рез.) $[x-\frac{2}{3}(1+\sqrt{-1}][x-\frac{2}{3}(1-\sqrt{-1})]$

8) $3x-\sqrt{6x+4}-20$

рез.) $(x-7-\sqrt{5})(x-7+\sqrt{5})$

9) $\dfrac{18+x}{\sqrt{1+2x}}-18+x$

рез.) $(x-24)(x-12)$

10) $\dfrac{n(2n^2+3n+1)}{1.2.3}$

рез.) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$

11) $\dfrac{n(n^2+3n+2)}{1.2.3}$

рез.) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$

5. Задачи на уравненія квадратныя съ нѣсколькими неизвѣстными.

1) $x-y=a$
$xy=b$

рѣш.) $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}, y=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$

2) $xy=16$
$\dfrac{x}{y}=4$

рѣш.) $x=\pm8, y=\pm2$

3) $ax^2+ny=b$

$my+cx=d$

рѣш.) $x'=\frac{nc}{2am}+\sqrt{\frac{n^2c^2}{4a^2m^2}+\frac{mb-nd}{am}}$,

$x''=\frac{nc}{2am}-\sqrt{\frac{n^2c^2}{4a^2m^2}+\frac{mb-nd}{am}}$

По найденнымъ значеніямъ x—са отыскать y; и найти также чему будутъ равны неизвѣстныя, когда: $a=c$, $b=d$ и $n=m$?

4) $x^2+y+z-100=0$

$x^2+2y+6x-5z=0$

$3x+4x^2-2z-7y=0$

рѣш.) $x'=\frac{\sqrt{125089}-17}{48}$, $x''=-\frac{17+\sqrt{125089}}{48}$

По найденнымъ значеніямъ x—са отыскать величины другихъ неизвѣстныхъ?

5) $xy=a$

$x^2+y^2=b$

рѣш.) $x=\pm\sqrt{\frac{b\pm\sqrt{b^2-4a^2}}{2}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{b\mp\sqrt{b^2-4a^2}}{2}}$

6) $x+y=a$

$x^2+y^2=b$

рѣш.) $x=\frac{a\pm\sqrt{2b-a^2}}{2}$, $y=\frac{a\mp\sqrt{2b-a^2}}{2}$

7) $x^2+y^2=74$

$xy=35$

рѣш.) $x'=\pm5$, $y'=\pm7$

или $x''=\pm7$, $y''=\pm5$

8) $\frac{x+y}{x-y}=a:b$

$xy=c^2$

рѣш.) $x=\pm c\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, $y=\pm c\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

9) $x^2+xy=24$

$y^2+xy=40$

рѣш.) $x=\pm 3,\ y=\pm 5$

10) $x^2-xy=48$

$xy-y^2=12$

рѣш.) $x=\pm 8,\ y=\pm 2$

11) $2x+3y=118$

$5x^2-7y^2=4333$

рѣш.) $x=35,\ y=16$

или $x=-229\frac{6}{17},\ y=192\frac{4}{17}$

12) $(x-y):(\sqrt{x}-\sqrt{y})=7:1$

$\sqrt{xy}=12$

рѣш.) $x'=9,\ x''=16,\ y'=16,\ y''=9$

13) $x^2+y^2=\frac{200}{x-y}$

$xy=\frac{96}{x-y}$

рѣш.) $x'=8,\ x''=-6,\ y'=6,\ y''=-8$

14) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{xy}=\frac{1}{9}$

рѣш.) $x'=6,\ x''=3,\ y'=3,\ y''=6$

6. Задачи на уравненія неопредѣленныя первой степени.

Найти значенія неизвѣстныхъ въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ изъ уравненій:

1) $19x-14y=1$

рѣш.) $x=3, 17, 31, 45$ и проч.

$y=4, 23, 42, 61$ и проч.

2) $17x+29y=573$

рѣш.) $x=32, 3$

$y=1, 18$

3) $21x+17y=2000$

рѣш.) $x=7, 24, 41, 58, 75, 92$

$y=109, 88, 67, 46, 25, 4$

4) $19x+13y=1000$

рѣш.) $x=41, 28, 15, 2$

$y=17, 36, 55, 74$

5) $16x=25y+1$

рѣш.) $x=11, 36, 61, 86, 111$ и проч.

$y=7, 23, 39, 55, 71$ и проч.

6) $8y+5x=47$

рѣш.) $x=3$

$y=4$

7) $3x+11y=100$

рѣш.) $x=26, 15, 4$

$y=2, 5, 8$

8) $11x+13y=1240$

рѣш.) $x=108, 95, 82, 69, 56, 43, 30, 17, 4$

$y=4, 15, 26, 37, 48, 59, 70, 81, 92$

9) $9x-7y=50$

рѣш.) $x=11, 18, 25, 32, 39$ и проч.

$y=7, 16, 25, 34, 43$ и проч.

10) $12x - 19y = 22$

рѣш.) $x = 5,\ 24,\ 43,\ 62$ и проч.

$y = 2,\ 14,\ 26,\ 38$ и проч.

11) $25x + 12y = 1080$

рѣш.) $x = 12,\ 24,\ 36$

$y = 65,\ 40,\ 15$

12) $\frac{x}{4} + \frac{y}{9} = \frac{17}{36}$

рѣш.) $x = 1$

$y = 2$

13) $15x + 21y + 35z = 207$

рѣш.) $x = 4,\ 11$

$y = 2,\ 2$

$z = 3,\ 0$

14) $3x + 5y + 7z = 560$

$9x + 25y + 49z = 2920$

рѣш.) $x = 15,\ 50$

$y = 82,\ 40$

$z = 15,\ 30$

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

1. Задачи на прогрессіи.

А) Прогрессіи Ариѳметическія.

Означаемъ первый членъ ариѳметической прогрессіи буквою a, разность чрезъ d, число членовъ ея чрезъ n, послѣдній членъ буквою z и сумму чрезъ s.

По даннымъ:		Рѣшенія:
1) a, d, n	Найти послѣдній членъ z	1) $z=a+(n-1)d$
2) a, d, s		2) $z=-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[2ds+(a-\frac{1}{2}d)^2]}$
3) a, n, s		3) $z=\frac{2s}{n}-a$
4) d, n, s		4) $z=\frac{s}{n}+\frac{(n-1)d}{2}$
5) a, d, n	Найти сумму s	5) $s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$
6) a, d, z		6) $s=\frac{a+z}{2}+\frac{(z+a)(z-a)}{2d}$
7) a, n, z		7) $s=\frac{1}{2}n(a+z)$
8) d, n, z		8) $s=\frac{1}{2}n[2z-(n-1)d]$

9) $a,\ n,\ z$	Найти разность d	9) $d=\frac{z-a}{n-1}$
10) $a,\ n,\ s$		10) $d=\frac{2s-2an}{n(n-1)}$
11) $a,\ z,\ s$		11) $d=\frac{(z+a)(z-a)}{2s-z-a}$
12) $n,\ z,\ s$		12) $d=\frac{2(nz-s)}{n(n-1)}$
13) $a,\ d,\ z$	Найти число членовъ n	13) $n=1+\frac{z-a}{d}$
14) $a,\ d,\ s$		14) $n=\frac{d-2a}{2d}\pm\sqrt{\left[\frac{2s}{d}+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$
15) $a,\ z,\ s$		15) $n=\frac{2s}{a+z}$
16) $d,\ z,\ s$		16) $n=\frac{2z+d}{2d}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2-\frac{2s}{d}\right]}$
17) $d,\ n,\ z$	Найти первый членъ a	17) $a=z-(n-1)d$
18) $d,\ n,\ s$		18) $a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$
19) $d,\ z,\ s$		19) $a=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[(z+\frac{1}{2}d)^2-2ds]}$
20) $n,\ z,\ s$		20) $a=\frac{2s}{n}-z$

B) Прогрессіи Геометрическія.

Означаемъ первый членъ геометрической прогрессіи буквою a, частное чрезъ q, число членовъ ея чрезъ n, послѣдній буквою z и сумму чрезъ s.

По даннымъ:		Рѣшенія:
1) $a,\ q,\ n$	Найти послѣдній членъ z	1) $z=aq^{n-1}$
2) $a,\ q,\ s$		2) $z=\frac{a+(q-1)s}{q}$
3) $a,\ n,\ s$		3) $z(s-z)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0$
4) $q,\ n,\ s$		4) $z=\frac{(q-1)sq^{n-1}}{q^n-1}$

Данныя		Формулы
5) $a,\ q,\ n$	Найти сумму s	5) $s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$
6) $a,\ q,\ z$		6) $s=\frac{qz-a}{q-1}$
7) $a,\ n,\ z$		7) $s=\frac{z^{\frac{n}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}}}$
8) $q,\ n,\ z$		8) $s=\frac{z(q^n-1)}{(q-1)q^{n-1}}$
9) $q,\ n,\ z$	Найти первый членъ a	9) $a=\frac{z}{q^{n-1}}$
10) $q,\ n,\ s$		10) $a=\frac{(q-1)s}{q^n-1}$
11) $q,\ z,\ s$		11) $a=qz-(q-1)s$
12) $n,\ z,\ s$		12) $a(s-a)^{n-1}-z(s-z)^{n-1}=0$
13) $a,\ n,\ z$	Найти частное q	13) $q=\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$
14) $a,\ n,\ s$		14) $q^n-\frac{sq}{a}+\frac{s-a}{a}=0$
15) $a,\ z,\ s$		15) $q=\frac{s-a}{s-z}$
16) $n,\ z,\ s$		16) $q^n-\frac{sq^{n-1}}{s-z}+\frac{z}{s-z}=0$
17) $a,\ q,\ z$	Найти число членовъ n	17) $q^{n-1}=\frac{z}{a}$
18) $a,\ q,\ s$		18) $q^n=\frac{a+(q-1)s}{a}$
19) $a,\ s,\ z$		19) $\left(\frac{s-a}{s-z}\right)^{n-1}=\frac{z}{a}$
20) $q,\ z,\ s$		20) $q^{n-1}=\frac{z}{qz-(q-1)s}$

Примѣчаніе. Въ послѣднихъ четырехъ уравненіяхъ неизвѣстное входитъ показателемъ; и слѣдовательно безъ помощи логариѳмовъ найдено быть не можетъ.

2. Задачи на логариѳмы.

A) Логариѳмическія преобразованія алгебраическихъ выраженій.

1) $\lg(a^2b\sqrt{a^{-1}b})$

рез.) $\frac{3}{2}(\lg a+\lg b)$

2) $\lg\frac{ab^{-3}\sqrt{c}}{c^{-1}\sqrt[3]{a^2b}}$

рез.) $\frac{2\lg a-20\lg b+9\lg c}{6}$

3) $\lg[(a+b)^2\sqrt[3]{(a^2-b^2)}]$

рез.) $\frac{7\lg(a+b)+\lg(a-b)}{3}$

4) $\lg\frac{1}{(a-b)^2\sqrt{a^2-b^2}}$

рез.) $-\frac{\lg(a+b)+5\lg(a-b)}{2}$

5) $\lg\frac{1}{(a+b)^n\sqrt[m]{(c-d)}}$

рез.) $-\left[n\lg(a+b)+\frac{\lg(c-d)}{m}\right]$

6) $\lg\left[\frac{(a^2b^5\sqrt{a^{-3}b})^{-1}}{c^3}\sqrt[3]{\frac{a^2b^4c^{-1}}{c^{-2}}}\right]$

рез.) $\frac{\lg a-25\lg b-16\lg c}{6}$

7) $\lg\sqrt[m]{(a^m\sqrt[n]{a^m})}$

рез.) $\frac{n+1}{n}\lg a$

8) $\lg\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(a+x)^2}$

рез.) $\frac{\lg(a-x)-3\lg(a+x)}{2}$

9) $\lg x^5+\frac{3}{4}\lg x$

рез.) $\frac{15}{4}\lg x$

10) $\lg a^2+\lg 3a^5+4\lg 3$

рез.) $5(\lg 3+\lg a)$

11) $$\lg\frac{c\sqrt[5]{\frac{a^2}{b}}}{(-a^2)\sqrt[5]{\frac{c^2}{b^5}}}$$

рез.) $\frac{9\lg c+4\lg b-20\lg a_n}{15}$ (*)

12) $$\lg\frac{a\sqrt{-c^2}}{a^{-1}\sqrt[4]{c^5}}$$

рез.) $\frac{8\lg a+\lg c}{4}+\frac{\lg 1_n}{2}$

13) $$\lg\frac{a^2(-b)^5}{\sqrt[5]{-a^2}\sqrt{\frac{a^{-1}}{b^{-5}}}}$$

рез.) $2,1\lg a_n+1,5\lg b_n$

14) $$\lg\left[\frac{(-a)\sqrt[3]{b^7c^2}}{\sqrt{ab^{-5}(-c)^5}}\right]^{-1}$$

рез.) $\frac{5\lg c-23\lg b-3\lg a_n}{6}+\frac{\lg 1_n}{2}$

15) $$\lg\frac{(-m)^{-5}(3a^2b^{-1}\sqrt[3]{m^2p})^{-2}}{\sqrt{3m^{-1}p^5\sqrt[4]{a^5b^{-5}}}}$$

рез.) $\frac{33\lg b-(30\lg 3+57\lg a+26\lg p+46\lg m_n)}{12}$

(*) Буква n, поставленная съ правой стороны логариѳма, показываетъ, что соотвѣтствующее ему число отрицательно. Если, при сложеніи, такихъ членовъ будетъ четное число, то буква n опускается, въ противномъ случаѣ удерживается. При вычитаніи двухъ логариѳмовъ съ буквою n послѣдняя опускается, но если только одинъ логариѳмъ имѣетъ сказанную отмѣтку, то буква n удерживается. Причина всего этого очевидна.

16) $\lg \frac{c^2 \sqrt[3]{a^{-5}} \sqrt{-1}}{c^3 \sqrt{-a^3}}$

рез.) $-\left(\lg c + \frac{19 \lg a}{6}\right)$

17) $\lg \left[a^3(-b)^{-1} c^2 \sqrt{-a^2 b}\right]^{-0,5}$

рез.) $0,25 \lg b_n - (2 \lg a + \lg c + 0,25 \lg 1_n)$

18) $\lg \left[\frac{\sqrt{-1}\sqrt[3]{-a}}{a^2 b \sqrt{-c^2}} \left(\sqrt[5]{abc^{-1}}\right)^2\right]^{-15}$

рез.) $19 \lg a_n + 9 \lg b + 21 \lg c$

B) Нахожденіе алгебраическихъ выраженій по Логариѳмическимъ выводамъ.

1) $2 \lg a - 3 \lg b$

рез.) $\frac{a^2}{b^3}$

2) $\frac{\lg(a-1) + \lg(a+1)}{m}$

рез.) $\sqrt[m]{a^2-1}$

3) $m \lg a + n \lg b - p \lg c_n$

рез.) $\frac{a^m b^n}{-c^p}$

4) $\frac{3 \lg a - [2 \lg b + 3 \lg c_n]}{5}$

рез.) $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2(-c)^3}}$

5) $2\left[\frac{2 \lg a_n - 3 \lg b_n}{3}\right]$

рез.) $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^3}}\right)^2$

6) $-\left[\frac{2 \lg a}{5} - \frac{3 \lg b}{2} + \frac{5 \lg c_n}{7} - \frac{\lg 1_n}{2}\right]$

рез.) $\left[\frac{\sqrt[5]{a^2\sqrt[7]{-c^5}}}{\sqrt{b^5\sqrt{-1}}}\right]^{-1}$

7) $3\left[\lg a-\left(\lg b+\frac{\lg 1_n}{2}\right)\right]$

рез.) $\left(\frac{a}{b\sqrt{-1}}\right)^3$

8) $\lg(m+1)-\frac{m-1}{m}\lg x-\frac{a}{a+1}\lg(z-1)+\frac{m-1}{m}\lg u-\frac{a}{a+1}\lg z$

рез.) $\frac{(m+1)\sqrt[m]{u^{m-1}}}{\sqrt[m]{x^{m-1}}\sqrt[a+1]{(z-1)^a z^a}}$

9) $\frac{m}{n}\lg x-\left(\frac{n}{x}\lg z+\frac{x}{m}\lg v+\frac{m}{x}\lg u\right)$

рез.) $\frac{\sqrt[n]{x^m}}{\sqrt[x]{z^n}\sqrt[m]{v^x}\sqrt[x]{u^m}}$

10) $\frac{a-x}{a+x}\left[\lg(a+x)-\lg(a-x)+\lg(a^2-x^2)\right]$

рез.) $(a+x)^{\frac{2(a-x)}{a+x}}$

C) Нахожденіе логариѳмовъ чиселъ.

1) $\lg 436067=5,6395532$
2) $\lg 1851273=6,2674705$
3) $\lg 7095137=6,8509608$
4) $\lg 3,614699=0,5580721$
5) $\lg 144,59809=2,1601626$
6) $\lg 0,0003599547=\overline{4},5562478$
7) $\lg 75907\frac{1}{8}=4,8802825$
8) $\lg 32116\frac{7}{9}=4,5067320$
9) $\lg(-15,432)=1,1884222_n$
10) $\lg(-0,005637)=\overline{3},7510480_n$
11) $\lg\frac{319.765}{138}=3,2475730$

12) $\lg\frac{-213.7,655}{3145.718}=\overline{4},8585798_n$

13) $\lg\sqrt[5]{\tfrac{4}{9}}=\overline{1},9295635$

14) $\lg\sqrt[12]{(0,325)^7}=\overline{1},7152653$

15) $\lg\frac{(0,432)^5(3,21)^2}{(0,0084)^4}=8,2223439$

16) $\lg\sqrt[80]{0,00534}=\overline{1},9715943$

17) $\lg\sqrt[5]{\frac{-0,365.\sqrt{2}}{788}}=\overline{1},3632563_n$

18) $\lg\sqrt[10]{\frac{78563\sqrt[3]{\tfrac{5}{3}}}{15.-\sqrt[4]{0,2}}}=0,3967819_n$

19) $\lg\sqrt[9]{\frac{-347.\sqrt[7]{0,0073}}{126.-\sqrt[3]{(\tfrac{2}{3})^2}}}=0,0280126$

20) $\lg\sqrt[0,108]{(395)^{0,27}}=6,4914927$

D) Отыскиваніе чиселъ, соотвѣтствующихъ данным логариѳмамъ.

(Нахожденіе Антилогариѳмовъ.)

Число, соотвѣтствующее данному логариѳму означаемъ знакомъ Nlg.

1) Nlg 1,0742664 = 11,86496 и проч.
2) Nlg 3,5947835 = 3933,539 и проч.
3) Nlg 0,7813427 = 6,044254 и проч.
4) Nlg 2,0037683 = 100,8714 и проч.
5) Nlg 6,0005673 = 1001307 и проч.
6) Nlg $\overline{1}$,6165834 = 0,4136027 и проч.
7) Nlg $\overline{3}$,7694480 = 0,0058809 и проч.
8) Nlg $\overline{2}$,2307611 = 0,0170122 и проч.
9) Nlg 5,6165834 = 413602,7 и проч.
10) Nlg 6,1785400 = 1508481, и проч.

E) Рѣшеніе различныхъ числовыхъ и алгебраическихъ задачъ помощію логариѳмовъ.

1) $\sqrt[4]{35246}$

рез.) 13,70179 и проч.

2) $\sqrt[6]{235,78}$

рез.) 2, 485522 и проч.

3) $\sqrt[5]{\frac{13}{16}}$

рез.) 0,959322 и проч.

4) $\sqrt[3]{17705\frac{2}{9}}$

рез.) 26,06356 и проч.

5) $\sqrt[5]{(317\frac{3}{4})^3}$

рез.) 31, 71402 и проч.

6) $\frac{(991,767)^5.12,34}{(20,358.10,1515)^6}$

рез.) 151, 974 и проч.

7) $\sqrt[5]{-\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}}$

рез.) —1,295695 и проч.

8) $\sqrt[3]{0,26.-\sqrt{\frac{2}{3}}}$

рез.) —0, 596544 и проч.

9) $\sqrt[5]{\frac{3425.\sqrt[7]{136}}{0,00034}}$

рез.) 28, 94639 и проч.

10) $253.\sqrt[5]{\frac{-716,5}{\sqrt{2}}}$

рез.) —2016,914 и проч.

11) $\sqrt[4]{\frac{138.(7,356)^9}{\sqrt{(3,25)^5}}}$

рез.) 146,213

12) $\sqrt[8]{21+\sqrt[6]{19}}$

рез.) 1,476875

13) $\sqrt[16]{\dfrac{43+5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}}$

рез.) 1,264848 и проч.

14) $\sqrt[0,2]{15+\frac{2}{3}\sqrt[\frac{3}{4}]{10}}$

рез.) 759389, 3629 и проч.

15) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^{-1}}}{(-a)^3c^{-1}\sqrt[5]{c^2b^{-3}}}$

рез.) $\sqrt[15]{-\dfrac{c^9b^4}{a^{33}}}$

16) $\dfrac{\sqrt{-c^2}}{a^{-2}\sqrt[4]{c^3}}$

рез.) $a^2\sqrt[4]{c}\sqrt{-1}$

17) $\left[\dfrac{-ab^2\sqrt[3]{bc^2}}{\sqrt{ab^{-3}(-c)^3}}\right]^{-1}$

рез.) $\sqrt[6]{\dfrac{c^5}{b^{23}a^3}}$

18) $\left[\dfrac{\sqrt{-1}\sqrt[3]{-a}}{a^2b\sqrt{-c^2}}\left(\sqrt[5]{\dfrac{ab}{c}}\right)^2\right]^{-15}$

рез.) $-a^{19}b^9c^{21}$

19) $\dfrac{\left(a^2b^3\sqrt{\frac{b}{a^3}}\right)^{-1}}{c^3}\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^4}{c^{-1}}}$

рез.) $\dfrac{1}{b^4c^2}\sqrt[6]{\dfrac{a}{bc^4}}$

20) $\sqrt{[a^3(-b)^{-1}\sqrt{-a^2bc^4}]^{-1}}$

рез.) $\dfrac{\sqrt[4]{b}}{a^2c}$

F) Задачи на рѣшеніе уравненій, въ коихъ неизвѣстныя входятъ показателемъ.

(Показательныя уравненія.)

1) $a^{2x-1}=b$

рѣш.) $x=\frac{\lg a+\lg b}{2\lg a}$

2) $3^{z}=177147$

рѣш.) $z=11$

3) $a^{my}b^{ny}=c$

рѣш.) $y=\frac{\lg c}{m\lg a+n\lg b}$

4) $\sqrt[2x]{64}=2$

рѣш.) $x=3$

5) $\left(\frac{21}{20}\right)^{y}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{7y}{2}}=\frac{7}{12}$

рѣш.) $y=0{,}30992$ и проч.

6) $\left(\frac{295}{867}\right)^{3-y}=632\left(\frac{56}{39}\right)^{\frac{5y}{9}}$

рѣш.) $11{,}04027$ и проч.

7) $3^{2y}5^{6y-7}=9^{y-2}7^{1-y}$

рѣш.) $y=0{,}75996$ и проч.

8) $b^{c^{x}}=d$

рѣш.) $x=\frac{\lg\lg d-\lg\lg b}{\lg c}$

Во что обратится послѣднее рѣшеніе, когда $b=10$, $c=1$, $d=100$? и также—когда $d=6$ и $c=1$?

9) $ab^{x}-cd^{x}=0$

рѣш.) $x=\frac{\lg c-\lg a}{\lg b-\lg d}$

10) $c^{mx} = ab^{nx-1}$

рѣш.) $x = \frac{\lg a - \lg b}{m \lg c - n \lg b}$

11) $c^{\frac{a+\sqrt{-x}}{a-\sqrt{-x}}} = b$

рѣш.) $x = -a^2 \left(\frac{\lg b - \lg c}{\lg b + \lg c} \right)^2$

12) $b^{n-\frac{a}{x}} = c^{mx} f^{x-p}$

рѣш.) $x' = \frac{n \lg b + p \lg f}{2(m \lg c + \lg f)} + \sqrt{\frac{(n \lg b + p \lg f)^2}{4(m \lg c + \lg f)^2} - \frac{a \lg b}{m \lg c + \lg f}}$

$x'' = \frac{n \lg b + p \lg f}{2(m \lg c + \lg f)} - \sqrt{\frac{(n \lg b + p \lg f)^2}{4(m \lg c + \lg f)^2} - \frac{a \lg b}{m \lg c + \lg f}}$

13) $a^{2x} + ba^x = c$

рѣш.) $x = \frac{\lg \alpha}{\lg a}$

Значеніе α извлекается изъ квадратнаго уравненія: $y^2 + by = c$, гдѣ $y = a^x$.

14) $a^{2x+m} + ba^{x+p} = c$

рѣш.) $x = \frac{\lg \alpha}{\lg a}$

Значеніе α и здѣсь извлекается изъ квадратнаго уравненія:
$a^m y^2 + a^p by = c$, гдѣ $y = a^x$.

15) $A^{x+y} = B$
$a^{x-y} = b$

рѣш.) $x = \frac{1}{2} \left(\frac{\lg B}{\lg A} + \frac{\lg b}{\lg a} \right)$

$y = \frac{1}{2} \left(\frac{\lg B}{\lg A} - \frac{\lg b}{\lg a} \right)$

G) Задачи на употребленіе гауссовыхъ логариѳмовъ. (*)

Логариѳмы Гаусса употребляются при отыскиваніи логариѳмовъ для суммъ и разностей; они получаются по формуламъ:

$\lg(a+b)=\lg a+\lg.$ Гаусса для суммъ;
$\lg(a-b)=\lg a+\lg.$ Гаусса для разностей.

Гдѣ (a), т. е. первое число должно быть всегда болѣе втораго (b). Аргументомъ для отыскиванія логариѳмовъ Гаусса служитъ разность логариѳмовъ данныхъ чиселъ, т. е., $\lg a-\lg b$. Пропорціональныя части при логариѳмахъ суммъ вычитаются, а для логариѳмовъ разностей прикладываются.

1) $\lg\left[(25,79)^2+\sqrt[3]{58,73}\right]$

рез.) $2,8255$

Въ этомъ примѣрѣ: $\lg a=\lg(25,79)^2=2,8228$, $\lg b=\lg\sqrt[3]{58,73}=0,5896$. Аргументъ для отыскиванія Гауссова логариѳма будетъ: $\lg a-\lg b=2,2332$; слѣдовательно: $\lg(a+b)=2,8255$.

2) $\lg\left[\sqrt[3]{(0,897)^2}-(0,256)^3\right]$

рез.) $\overline{1},9606$

Въ этомъ примѣрѣ: $\lg a=\lg\sqrt[3]{(0,897)^2}=\overline{1},9685$, $\lg b=\lg(0,256)^3=\overline{2},2246$. Аргументъ для отысканія Гауссова логариѳма будетъ: $\lg a-\lg b=1,7439$; слѣдовательно $\lg(a-b)=\overline{1},9606$.

3) $\lg\left[\sqrt{\left(\frac{0,378}{1,834}\right)^3+(0,389)^2}\right]\cdot\left[\sqrt[3]{0,789}-\sqrt[5]{(2,345)^2}\right]$

рез.) $\overline{1},0720_n$

(*) Въ этомъ отдѣлѣ задачъ мы употребляемъ четырехзначные логариѳмы, составленные Г. Астрономомъ Швейцеромъ.

4) $\lg \dfrac{\sqrt[7]{(31,67)^2}+\sqrt[5]{(2,67)^3}}{\sqrt[3]{2,03}-\sqrt[4]{(0,063)^3}}$

рез.) 0,5152

5) $\lg \dfrac{(0,57)^3+(2,976)^{0,3}}{\sqrt[7]{(\frac{5}{9})^2}-\sqrt[3]{0,034}}$

рез.) 0,5638

6) $\lg \left[\left(\dfrac{1,038}{\sqrt{1,56}}\right)^4-\sqrt[3]{1,489}\right].\left[(0,896)^{-3}+\sqrt[4]{0,0267}\right]$

рез.) $0,7228_n$

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

1. Задачи на дифференціальное вычисленіе и приложеніе онаго къ различнымъ дѣйствіямъ.

A) Нахожденіе дифференціаловъ алгебраическихъ функцій объ одномъ перемѣнномъ.

1) $d\,[x^4+12x^3-29x^2-61x-134]$

рез.) $(4x^3+36x^2-58x-61)dx$

2) $d\left[a+b\sqrt{x}-\frac{c}{x}\right]$

рез.) $\left[\frac{b}{2\sqrt{x}}+\frac{c}{x^2}\right]dx$

3) $d\,(x^2+x^3)$

рез.) $(2+3x)x\,dx$

4) $d\left[\frac{a}{\sqrt{x}}+b+c\sqrt{x}-mx\right]$

рез.) $\left[\frac{c}{2\sqrt{x}}-\frac{a}{2x\sqrt{x}}-m\right]dx$

5) $d\left[a+\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{m}{x^2}\right]$

рез.) $\left[\frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2m}{x^3}\right]dx$

6) $d\,(ax^m+b)^n$

рез.) $mnax^{m-1}(ax^m+b)^{n-1}dx$

7) $d(5-2x^3)^3$

рез.) $-18(5-2x^3)^2x^2dx$

8) $d\,(a+bx+cx^2)^m$

РЕЗ.) $m(a+bx+cx^2)^{m-1}(b+2cx)dx$

9) $d\left[\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\right]$

РЕЗ.) $\frac{-3dx}{4x\sqrt[4]{x^5}}$

10) $d\sqrt{2ax-x^2}$

РЕЗ.) $\frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$

11) $d\left[\frac{x}{a}-\frac{x^2}{1-x}\right]$

РЕЗ.) $\left[\frac{1}{a}-\frac{(2-x)x}{(1-x)^2}\right]dx$

12) $d\,[a^2-x^2]^2$

РЕЗ.) $-4x(a^2-x^2)dx$

13) $d\left[\frac{1}{a^2+x^2}\right]$

РЕЗ.) $-\frac{2xdx}{(a^2+x^2)^2}$

14) $d\sqrt{px-\frac{px^2}{2a}}$

РЕЗ.) $\frac{(a-x)pdx}{2a\sqrt{px-\frac{px^2}{2a}}}$

15) $d\left[\frac{x}{a^2+x^2}\right]$

РЕЗ.) $\frac{(a^2-x^2)dx}{(a^2+x^2)^2}$

16) $d\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

РЕЗ.) $\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

17) $d\left[\frac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4}\right]$

РЕЗ.) $-\frac{2x(2a^4+2a^2x^2-x^4)dx}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}$

18) $d\left[\frac{3+5x^2}{5-3x^2}\right]$

РЕЗ.) $\frac{68xdx}{(5-3x^2)^2}$

19) $d\left[x\sqrt{\frac{b+x}{a-x}}\right]$

РЕЗ.) $\frac{[2ab+(3a-b)x-2x^2]dx}{2\sqrt{(a-x)^3(b+x)}}$

20) $d\,[\sqrt{a+x}\sqrt[4]{a+x}]$

РЕЗ.) $\frac{3dx}{4\sqrt[4]{a+x}}$

21) $d\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

РЕЗ.) $-\frac{a^2dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

22) $d\left[\frac{a+2bx}{\sqrt{ax+bx^2}}\right]$

РЕЗ) $-\frac{a^2dx}{2(ax+bx^2)\sqrt{ax+bx^2}}$

23) $d\sqrt{a+bx+cx^2}$

РЕЗ.) $\frac{(b+2cx)dx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}$

24) $d\,[(a^2+x\sqrt{x})(b-\sqrt{x})\sqrt[3]{x^2}]$

РЕЗ.) $\frac{(4a^2b-7a^2\sqrt{x}+13bx\sqrt{x}-16x^2)dx}{6\sqrt[3]{x}}$

25) $d\left[\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}\right]$

РЕЗ.) $\frac{-a^2dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

26) $d\sqrt[3]{a+\sqrt{bx}+x}$

РЕЗ.) $\frac{(\sqrt{b}+2\sqrt{x})dx}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(a+\sqrt{bx}+x)^2}}$

27) $d\left[\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]$

РЕЗ.) $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})^2}$

28) $d\left[\frac{5x^2+3}{\sqrt{71-3x^3}}\right]$

РЕЗ.) $\frac{(1420x+27x^2-15x^4)dx}{2\sqrt{(71-3x^3)^3}}$

29) $d\left[\frac{\sqrt{(4x^3-5)^3}}{\sqrt[3]{(5x^2+1)^2}}\right]$

РЕЗ.) $\frac{[(190x^4+54x^2+100x)\sqrt{4x^3-5}]dx}{\sqrt[3]{(5x^2+1)^5}}$

30) $d[7x^3\sqrt[5]{(4x^2+3)}]$

РЕЗ.) $\frac{(476x^4+315x^2)dx}{5\sqrt[5]{(4x^2+3)^4}}$

31) $d\,[\,x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}]$

РЕЗ.) $\frac{(a^4+a^2x^2-4x^4)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

32) $d\,[\,\frac{4}{3}x\sqrt{ax-x^2}]$

РЕЗ.) $\frac{2(3a-4x)xdx}{3\sqrt{ax-x^2}}$

33) $d\left[\frac{3x^3}{4\sqrt[3]{(5-\sqrt{x})^4}}\right]$

рез.) $\frac{5(9-\sqrt{x})x^2dx}{4\sqrt[3]{(5-\sqrt{x})^7}}$

34) $d\left[\frac{4}{3x}-\frac{1}{3x^3}\right]\sqrt{1-x^2}$

рез.) $\frac{(1-2x^2)dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$

35) $d\sqrt[4]{\left[1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(1-x^2)^2}\right]^3}$

рез.) $\frac{\left[\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\frac{4x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\right]dx}{4\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}}$

В) Нахожденіе дифференціаловъ функцій трансцендентныхъ объ одномъ перемѣнномъ. (*)

1) $dl\,(1+x^2)$

рез.) $\frac{2xdx}{1+x^2}$

2) $dl\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

рез.) $\frac{dx}{x(1+x^2)}$

3) $dl\,[x+\sqrt{1+x^2}]$

рез.) $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

(*) Логариѳмы, употребляемые въ отдѣлѣ задачъ на высшія вычисленія, суть Неперовы; станемъ отличать ихъ буквою l, оставляя L для всякой другой системы.

4) $d\,l\left[\frac{1-x}{1+x}\right]$

РЕЗ.) $-\frac{2dx}{x^2-1}$

5) $d\,5\,l\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$

РЕЗ.) $\frac{10dx}{1-x^2}$

6) $d\,\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left[x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}\right]$

РЕЗ.) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7) $d\,l\left[x^3+2x^2\right]$

РЕЗ.) $\left[\frac{3x+4}{x^2+2x}\right]dx$

8) $d\,l\sqrt{x^2+5}$

РЕЗ.) $\frac{xdx}{x^2+5}$

9) $d\,l\frac{ax^2}{\sqrt{(5-7x^2)^3}}$

РЕЗ.) $\frac{(10+7x^2)dx}{(5-7x^2)x}$

10) $d\,xl\,x$

РЕЗ.) $(lx+1)dx$

11) $dx^m(lx)^n$

РЕЗ.) $x^{m-1}(lx)^{n-1}[mlx+n]$

12) $d\,(lx)^2$

РЕЗ.) $\frac{2lxdx}{x}$

13) $d\,\left[x^m lx-\frac{1}{m}x^m\right]$

РЕЗ.) $mx^{m-1}lxdx$

14) $d\,llx$

РЕЗ.) $\dfrac{dx}{xlx}$

15) $d\,lllx$

РЕЗ.) $\dfrac{dx}{xlxllx}$

16) $d\,ll\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

РЕЗ.) $\dfrac{2xdx}{(a^2+x^2)l(a^2+x^2)}$

17) $d\,l\left[\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right]$

РЕЗ.) $\dfrac{-dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

18) $d\,\left[L\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right]$

РЕЗ.) $\dfrac{2Ledx}{\sqrt{1+x^2}}$

19) $d\,[L(x+\sqrt{1+x^2})]$

РЕЗ.) $\dfrac{Ledx}{\sqrt{1+x^2}}$

20) $d\,\dfrac{1}{2\sqrt{ac}}\,l\,\dfrac{\sqrt{a}+x\sqrt{c}}{\sqrt{a}-x\sqrt{c}}$

РЕЗ.) $\dfrac{dx}{a-cx^2}$

21) $d\,\dfrac{11x^5}{\sqrt[3]{(l8x)^2}}$

РЕЗ.) $\dfrac{(165x^5l8x-22x^5)dx}{3x\sqrt[3]{(l8)^5}}$

22) $d\,(x^x)$

РЕЗ.) $x^x(1+lx)dx$

23) $d\ (5^{3x})$

РЕЗ.) $5.5^{3x} l5 dx$

24) $d\ (e^x x^n)$

РЕЗ.) $e^x(nx^{n-1}+x^n)dx$

25) $d\ (x^{x^x})$

РЕЗ.) $x^{x^x} x^x \left[(lx)^2+lx+\frac{1}{x}\right]dx$

26) $d\ (\sqrt{x^{\sqrt{x}}})$

РЕЗ.) $\sqrt{x^{\sqrt{x}}}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{lx}{2}\right) dx$

27) $d\ (a^{b^x})$

РЕЗ.) $a^{b^x} b^x\ la\ lb\ dx$

28) $d\ (a^{\sqrt{2x+1}})$

РЕЗ.) $\frac{a^{\sqrt{2x+1}}}{Le\sqrt{2x+1}}\ dx$

29) $d\ (a^{x\sqrt{-1}})$

РЕЗ.) $\frac{a^{x\sqrt{-1}}\sqrt{-1}dx}{Le}$

30) $d\ [5+3x^3]^{3-2x}$

РЕЗ.) $(5+3x^3)^{3-2x}\left[9x^2\frac{(3-2x)}{5+3x^3}-2l\,(5+3x^3)\right]dx$

31) $d\ l(7-4x^3)^{x-1}$

РЕЗ.) $\left[l(7-4x^3)-\frac{12x^2(x-1)}{7-4x^3}\right]dx$

32) $d\ (\sin 2x)$

РЕЗ.) $2\cos 2x dx$

33) $d\ (m \sin^n x)$

РЕЗ.) $mn \sin^{n-1} x \cos x dx$

34) $d\ (\cos^2 x)$

РЕЗ.) $-2\cos x \sin x dx$

35) $d\ (\cos x + \sec x)$

РЕЗ.) $\sin x\ tg^2 x$

36) $d \sin^m x \cos^n x$

РЕЗ.) $(m \cos^2 x - n \sin^2 x) \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x dx$

37) $d \left(\frac{\sin x}{8} - \frac{\sin 3x}{48} - \frac{\sin 5x}{80} \right)$

РЕЗ.) $\sin x^2 \cos^2 x dx$

38) $d\ (x - \sin x \cos x)$

РЕЗ.) $2 \sin^2 x dx$

39) $d\ \frac{2+3\cos^2 2x}{30} \sin^3 2x$

РЕЗ.) $\sin^2 2x \cos^2 2x dx$

40) $dl \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

РЕЗ.) $\sec x dx$

41) $d\, l \sin^3 x$

РЕЗ.) $3 \cot g\, x dx$

42) $d\, l\, tg\, x$

РЕЗ.) $\frac{2dx}{\sin 2x}$

43) $d\ \cos x^{\sin x}$

РЕЗ.) $\cos x^{\sin x} \left(\cos x\, l \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) dx$

44) $d\ \frac{e^{ax}(a \sin x - \cos x)}{1+a^2}$

РЕЗ.) $e^{ax} \sin x dx$

45) $d\, l \frac{a + b \cos x + \sin x \sqrt{a^2 - b^2}}{b + a \cos x}$

РЕЗ.) $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b + a \cos x} dx$

46) $d\ (\frac{1}{2} Arctg^2 x)$

РЕЗ.) $\frac{x dx}{1+x^4}$

47) $d\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ Arc\ \cos(1-x)\right]$

РЕЗ.) $\frac{dx}{\sqrt{2x(2-x)}}$

48) $d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\ Arctg\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$

РЕЗ.) $\frac{dx}{1+x+x^2}$

49) $d\ Arc\ \sin 2x\sqrt{1-x^2}$

РЕЗ.) $\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

50) $d\ Arctg\frac{2x}{1-x^2}$

РЕЗ.) $\frac{2dx}{1+x^2}$

51) $d\ e^{Arc\ \sin x}$

РЕЗ.) $e^{Arc\ \sin x}\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

52) $d\ l\ Arc\ \sin\sqrt{2ax-x^2}$

РЕЗ.) $\left[-\frac{(a-x)dx}{\sqrt{(2ax-x^2)-(2ax-x^2)^2}}\right]: Arc\ \sin\sqrt{2ax-x^2}$

C) Нахожденіе полныхъ дифференціаловъ функцій о многихъ перемѣнныхъ.

1) $d\left[6x^{2m+1}y+\frac{ny}{x^2}\right]$

РЕЗ.) $6(2m+1)x^{2m}ydx+6x^{2m+1}dy+\frac{nx^2dy-2nxydx}{x^4}$

2) $d\left[5nx^{m-1}y^{n+1}\right]$

РЕЗ.) $5n(m-1)x^{m-2}y^{n+1}dx+5n(n+1)x^{m-1}y^{n}dy$

3) $d\left[\frac{na^2-7bxy}{n}\right]$

РЕЗ.) $-\frac{7b}{n}\left[ydx+xdy\right]$

4) $d\left[x^4-a^2x^2+a^2y^2+x^2y^2+y^4\right]$

РЕЗ.) $(4x^3-2a^2x+2xy^2)dx+(2a^2y+2x^2y+4y^3)dy$

5) $d\left[\frac{3xy}{z^3}\right]$

РЕЗ.) $\frac{3z(xdy+ydx)-9xydz}{z^4}$

6) $d\left[3amx^3z+11b^3m^2+5a^4x^2z^2\right]$

РЕЗ.) $(9mx+10a^3z)axzdx+(3mx+10a^3z)ax^2dz$

7) $d\left[13n^3x^7z-11x^3z^5\right]$

РЕЗ.) $(91n^3x^6z-33x^2z^5)dx+(13n^3x^7-55x^3z^4)dz$

8) $d\left[x^2y^2+y^2z^2\right]$

РЕЗ.) $2xy^2dx+(x^2y+yz^2)dy+y^2zdz$

9) $d\left[\frac{5x^2-y^3}{4x^2+y^3}\right]$

РЕЗ.) $\frac{9xy^2(2ydx-3xdy)}{(4x^2+y^3)^2}$

10) $d\left[\frac{3xy}{7mz}\right]$

РЕЗ.) $\frac{3z(xdy+ydx)-3xydz}{7mz^2}$

11) $d\left[\frac{3m^3}{5x^2}-4mxy\sqrt{y+a}\right]$

РЕЗ.) $-\left[\frac{6m^3dx}{5x^3}+4my\sqrt{y}\,dx+6mx\sqrt{y}\,dy\right]$

12) $d\sqrt{\left[\frac{x^2-4yz+n}{6x^3-1}\right]^3}$

РЕЗ.) $\sqrt{x^2-4yz+n}\left[(3xdx-6ydz-6zdy)(6x^3-1)-\right.$
$\left.27x^2(x^2-4yz+n)dx\right]:\sqrt{(6x^3-1)^5}$

13) $d\ [ylx]$

РЕЗ.) $lxdy + \frac{ydx}{x}$

14) $d\ [x^y]$

РЕЗ.) $yx^{y-1}dx + x^y lxdy$

15) $d\ [x^2+y^2-2xycosz]$

РЕЗ.) $2[(x-ycos\,z)dx+(y-xcos\,z)dy+xysin\,zdz]$

16) $d\ (a+sin\,x\,cos\,y)$

РЕЗ.) $cos\,x\,cos\,ydx - sin\,x\,sin\,ydy$

17) $d\,l\frac{x+y}{x-y}$

РЕЗ.) $-\frac{2ydx}{x^2-y^2}+\frac{2xdy}{x^2-y^2}$

18) $d\left(Arc\ tg\,\frac{x}{y}\right)$

РЕЗ.) $\frac{ydx}{x^2+y^2}-\frac{xdy}{x^2+y^2}$

19) $d\left(\frac{e^x y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

РЕЗ.) $\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right)e^x dx+\frac{e^x x^2 dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

D) Высшіе дифференціалы.

1) $d^2(x^2)$

РЕЗ.) $2dx^2$

2) $d^3(x^4)$

РЕЗ.) $24xdx^3$

3) $d^4(x^5)$

РЕЗ.) $120xdx^4$

4) $d^2(x^{-3})$

РЕЗ.) $12x^{-5}dx^2$

5) $d^3(x^{-5})$

РЕЗ.) $\frac{-60dx^3}{x^6}$

6) $d^5(x^{-3})$

РЕЗ.) $\frac{-210dx^3}{x^8}$

7) $d^3(\sqrt[4]{x})$

РЕЗ.) $\frac{21dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}}$

8) $d^2\left[\frac{a}{\sqrt{x}}+b+c\sqrt{x}-ex\right]$

РЕЗ.) $\frac{3adx^2}{4x^2\sqrt{x}}-\frac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}$

9) $d^2\left[a+\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{f}{x^2}\right]$

РЕЗ.) $\frac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{x^2}}-\frac{28cdx^2}{9x^3\sqrt[3]{x}}+\frac{6fdx^2}{x^4}$

10) $d^4\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

РЕЗ.) $\frac{(9+72x^2+24x^4)dx^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}$

11) $d^3\left[\frac{a^2}{a^2+x^2}\right]$

РЕЗ.) $\frac{(24a^4x-24a^2x^3)dx^3}{(a^2+x^2)^4}$

12) $d^2[\sqrt{a^2-x^2}]$

РЕЗ.) $\frac{(2x^2-a^2)dx^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

13) $d^2[ce^{\frac{x}{a}}]$

РЕЗ.) $\frac{ce^{\frac{x}{a}}dx^2}{a^2}$

14) $d^5[x^x]$

РЕЗ.) $x^x\left[(1+lx)^5+3\left[\frac{1+lx}{x}\right]-\frac{1}{x^2}\right]dx^5$

15) $d^2(\sin x)$

РЕЗ.) $-\sin x dx^2$

16) $d^2(\cos x)$

РЕЗ.) $-\cos x dx^2$

17) $d^5(\sin x)$

РЕЗ.) $-\cos x dx^5$

18) $d^4(\cos x)$

РЕЗ.) $\cos x dx^4$

19) $d^5(tg x)$

РЕЗ.) $\left[\frac{120}{\cos^6 x}-\frac{120}{\cos^4 x}+\frac{16}{\cos^2 x}\right]dx^5$

2. Опредѣленіе точныхъ значеній отношеній двухъ функцій, обращающихся при извѣстныхъ значеніяхъ перемѣннаго въ $\frac{0}{0}$ или въ одинъ изъ другихъ неопредѣленныхъ видовъ.

Данныя функціи.	Значенія x-са, при которыхъ функціи обращаются въ $\frac{0}{0}$ или въ одинъ изъ неопредѣлен. видовъ.	Точныя значенія
1) $\frac{5x^3-40}{x^2-4}$	2	15
2) $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$	a	$\frac{3}{2}a$
3) $\frac{3x^3-7x^2-8x+20}{5x^3-21x^2+24x-4}$	2	$\frac{11}{9}$
4) $\frac{x^3-x^2-189x-315}{x^4-227x^2+37x-105}$	15	$\frac{456}{6727}$
5) $\frac{21x^3-4x^2-25x+8}{15x^4-11x^3-10x^2+7x+1}$ . . .	1	$\frac{15}{7}$
6) $\frac{\sqrt{x^4+3ax^3-4a^4}}{\sqrt{x^2-a^2}}$	a	$a\sqrt{\frac{15}{2}}$
7) $\frac{a^2-\sqrt{a^4-x^2}}{x^2}$	0	$\frac{1}{2a^2}$
8) $\frac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ . .	0	$\sqrt{a}$
9) $\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{\sqrt{(x-a)^3}}$	a	$\sqrt{8a^3}$

Данныя функціи.	Значенія x-са, при которыхъ функціи обращаются въ $\frac{0}{0}$ или въ одинъ изъ неопредѣлен. видовъ.	Точныя значенія
10) $\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}}$	a	$-5a$
11) $\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$	a	$\frac{16}{9}a$
12) $\frac{a+\sqrt{2a^2-2ax}-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x+\sqrt{a^2-x^2}}$ . .	a	1
13) $\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$	1	n
14) $\frac{x-x^{2n+1}}{1-x^2}$	1	n
15) $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$	1	$\frac{n^2+n}{2}$
16) $\frac{a^n-x^n}{la-lx}$	a	na^n
17) $\frac{lx}{\sqrt{1-x}}$	1	0
18) $\frac{lx}{\sqrt{x^2-1}}$	1	0
19) $\frac{a^x-1}{x}$	0	la
20) $\frac{a^x-b^x}{x}$	0	$la-lb$
21) $\frac{x^x-x}{1-x+lx}$	0	-2
22) $\frac{a-x-ala+alx}{a-\sqrt{2ax-x^2}}$	a	-1

Данныя функціи.	Значенія x-са, при которыхъ функціи обращаются въ $\frac{0}{0}$ или въ одинъ изъ неопредѣлен. видовъ.	Точныя значенія
23) $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ . . . . . , .	90°	1
24) $x\, tg x-\frac{\pi}{2}\sec x$	$\frac{\pi}{2}$	—1
25) x^x	0	1
26) $(x^2-1)^{x-1}$	1	1
27) $x^{\frac{1}{x}}$	∞	1
28) $(l)^{\frac{1}{x}}$	∞	1

3. Опредѣленіе наибольшихъ и наименьшихъ значеній функцій.

(MAXIMA ET MINIMA.)

Данныя функціи.	Значенія x—са для наибольшихъ.	Значенія x—са для наименьшихъ.
1) $(x-a)^n$	(*)	$x=a$
2) x^2+3x+2		$x=-\frac{3}{2}$
3) $x^5-5x^4+5x^3+1$	$x=1$	$x=3$
4) $\frac{x}{1+x^2}$	$x=1$	$x=-1$
5) x^2+px+q		$x=-\frac{p}{2}$
6) $2ax^2-6x^3$	$x=\frac{2}{9}a$	$x=0$
7) $x\sqrt{a^2-x^2}$	$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$	$x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$
8) $\frac{x^2-7x+6}{x-10}$	$x=4$	$x=16$
9) $\sqrt{2px}$		. . . . .
10) $3a^2x^3-b^4x+c^3$	$x=-\frac{b^2}{3a}$	$x=\frac{b^2}{3a}$
11) $a+b(x-c)^4$		$x=c$
12) $\frac{\pi b^2}{a^2}(ax^2-x^3)$	$x=\frac{2a}{3}$	$x=0$
13) $\frac{2a^3}{b}+2bx+\frac{2a^3}{x}$	$x=-\sqrt{\frac{a^3}{b}}$	$x=\sqrt{\frac{a^3}{b}}$
14) $b+\sqrt[3]{(2ax-x^2)^2}$	$x=a$	. . . .
15) $(a_1-x)^2+(a_2-x)^2+(a_3-x)^2+ \ldots +(a_n-x)^2$		$x=\frac{a_1+a_2+a_3+..a_n}{n}$

(*) Пропунктированныя мѣста означаютъ отсутствіе наибольшей или наименьшей.

Данныя функціи.	Значенія x—са для наибольшихъ.	Значенія x—са для наименьшихъ.
16) $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}$ . .		$x=\frac{ac}{a+b}$
17) $\frac{2a}{x}+2\pi x^2$		$x=\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$
18) $p(p-a)(p-x)(a+x-p)$ . .	$x=\frac{2p-a}{2}$	. . . .
19) $\frac{2-3x+x^2}{2+3x+x^2}$	$x=-\sqrt{2}$	$x=\sqrt{2}$
20) $\frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$	$x=0$	$x=2$
21) $\cos x+\cos(\alpha-x)$.	$x=\frac{\alpha}{2}$	. . . .
22) $\cos x\cos(\alpha-x)$	$x=\frac{\alpha}{2}$	. . . .
23) $\sin x\cos x$	$x=45^0, x=225^0$	. . . .
24) $\sin^2 x\cos x$	$x=54^0 44' 8''$	$x=0$
25) $\frac{Lx}{x}$	$x=e$	. . . .
26) $\frac{a^x}{x}$		$x=Le$
27) $x^a e^{-x}$	$x=a$	. . . .
28) $e^x-2\cos x+e^{-x}$		$x=0$
29) $\frac{6a+\sqrt{12a\pi x^5-9a^2}}{2x}$	$x=\sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}}$	$x=\sqrt[3]{\frac{15a}{2\pi}}$
30) $\sqrt[x]{x}$	$x=2,71828$ и проч.	. . . .

2. Задачи на Интегральное вычисленіе.

А) Интегрированіе непосредственное.

а) Когда производныя суть функціи алгебраическія простыя.

1) $\int ax^m dx$

рез.) $\frac{a}{m+1}x^{m+1}+C$

2) $\int 7x^3 dx$

рез.) $\frac{7}{4}x^4+C$

3) $\int \frac{dx}{x^3}$

рез.) $C-\frac{1}{2x^2}$

4) $\int x^{-2}dx$

рез.) $C-\frac{1}{x}$

5) $\int \sqrt{x^3}dx$

рез.) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

рез.) $2\sqrt{x}+C$

7) $\int \frac{3dx}{x^7}$

рез.) $C-\frac{1}{2x^6}$

8) $\int \frac{15a\,dx}{4\sqrt[3]{3x^2}}$

рез.) $\frac{45a}{4}\sqrt[3]{\frac{x}{3}}+C$

9) $\int 4\sqrt[3]{x^2}\,dx$

рез.) $\frac{12}{5}\sqrt[3]{x^5}+C$

10) $\int \frac{7dx}{2\sqrt{x^5}}$

рез.) $C-\frac{7}{3\sqrt{x^3}}$

b) **Когда производныя суть функціи трансцендентныя простыя.**

1) $\int a^x dx$

рез.) $\frac{a^x}{la}+C$

2) $\int e^x dx$

рез.) e^x+C

3) $\int a^{mx} dx$

рез.) $\frac{a^{mx}}{mla}+C$

4) $\int a^{x\sqrt{2}} dx$

рез.) $\frac{a^{x\sqrt{2}}}{\sqrt{2}la}+C$

5) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$

рез.) $l\,(1+\sin x)+C$

6) $\int \frac{dx}{a+x}$

РЕЗ.) $l\,(a+x)+C$

7) $\int \frac{\sin x dx}{2(a-\cos x)}$

РЕЗ.) $\frac{1}{2} l(a-\cos x)+C$

8) $\int a \sin^2 x \cos x dx$

РЕЗ.) $\frac{a \sin^3 x}{3}+C$

9) $\int -b \cos^3 x \sin x dx$

РЕЗ.) $\frac{b \cos^4 x}{4}+C$

10) $\int \frac{tg\, x dx}{\cos^2 x}$

РЕЗ.) $\frac{tg^2 x}{2}+C$

11) $\int -\frac{\cot^2 x dx}{\sin^2 x}$

РЕЗ.) $\frac{\cot^3 x}{3}+C$

12) $\int \frac{\cot x dx}{\sin^2 x}$

РЕЗ.) $C-\frac{1}{2\sin^2 x}$

13) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

РЕЗ.) $l tg\, x+C$

14) $\int \mathrm{cosec} x dx$

РЕЗ.) $l tg \frac{1}{2} x+C$

15) $\int \sec x dx$

рез.) $C - l tg(45^\circ - \frac{1}{2}x)$

16) $\int \sin x \cos^4 x dx$

рез.) $C - \frac{1}{5}\cos^5 x$

17) $\int tg\, x dx$

рез.) $l \sec x + C$

18) $\int \frac{3d\sqrt{x}}{4\sqrt{1-x}}$

рез.) $\frac{3}{4} Arc \sin\sqrt{x} + C$

19) $\int \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

рез.) $a\, Arc \sin \frac{x}{a} + C$; во что обратится результатъ, когда $x = a$?

20) $\int \frac{4mdm}{1+m^4}$

рез.) $2 Arc\, tg\, m^2 + C$

21) $\int \frac{\frac{dx}{a}}{a^2 x + x^2}$

рез.) $\frac{1}{a^2} Arc\, tg \frac{x}{a} + C$

22) $\int \frac{d \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}}{[x^2 + (a^2 - x^2)] : x^2}$

рез.) $Arc\, tg \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C$

Во что обратится результатъ, когда $x = 0$?

B) Интегрированіе чрезъ введеніе другаго перемѣннаго.

1) $\int\frac{dx}{x-a}$

рез.) $l\,(x-a)+C$

2) $\int\frac{dx}{(x-a)^m}$

рез.) $\frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C$

3) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$

рез.) $\frac{1}{a}\,Arc\,tg\,\frac{x}{a}+C$

4) $\int\frac{xdx}{a^2+x^2}$

рез.) $\frac{1}{2}l(a^2+x^2)+C$

5) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

рез.) $l\sqrt{x^2+a^2}+C$

6) $\int\frac{2x^4dx}{a+bx^5}$

рез.) $\frac{2}{5b}\,l(a+bx^5)+C$

7) $\int\frac{5x^3dx}{7-4x^4}$

рез.) $C-\frac{5}{16}l(7-4x^4)$

8) $\int\frac{3x^2dx}{4(1+4x^3)^2}$

рез.) $C-\frac{1}{16(1+4x^3)}$

9) $\int 17x^5\sqrt{(1+5x^4)^5}\,dx$

РЕЗ.) $\frac{34}{100}(1+5x^4)^2\sqrt{1+5x^4}+C$

10) $\int \frac{5}{8}x^2\sqrt[5]{(3+\frac{1}{2}x^3)^2}\,dx$

РЕЗ.) $\frac{25}{84}\sqrt[5]{(3+\frac{1}{2}x^3)^7}+C$

11) $\int \frac{cx^{n-1}dx}{a+bx^n}$

РЕЗ.) $l\sqrt[nb]{(a+bx^n)^c}+C$

12) $\int \frac{x^{\alpha-1}dx}{a^2+b^2x^{2\alpha}}$

РЕЗ.) $\frac{1}{\alpha ab}\,Arc\ tg\,\frac{bx^\alpha}{a}+C$

13) $\int (a+bx)^m dx$

РЕЗ.) $\frac{(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)}+C$

14) $\int (4a-8x)(ax-x^2)^3 dx$

РЕЗ.) $(ax-x^2)^4+C$

15) $\int 2(a-2x)\sqrt{ax-x^2}\,dx$

РЕЗ.) $\frac{4}{3}\sqrt{(ax-x^2)^3}+C$

16) $\int (a+bx^n)^m x^{n-1}dx$

РЕЗ.) $\frac{(a+bx^n)^{m+1}}{bn(m+1)}+C$

17) $\int x^{r-1}\sqrt[m]{(a+bx^r)^n}\,dx$

РЕЗ.) $\frac{m\sqrt[m]{(a+bx^r)^{n+m}}}{br(n+m)}+C$

18) $\int \frac{x^{r-1}dx}{\sqrt[m]{(a+bx^r)^n}}$

РЕЗ.) $\frac{m\sqrt[m]{(a+bx^r)^{m-n}}}{br(m-n)}+C$

19) $\int \frac{(3x-18x^2)dx}{\sqrt[5]{(x^2-4x^3)^2}}$

РЕЗ.) $\frac{5}{2}\sqrt[5]{(x^2-4x^3)^3}+C$

20) $\int \frac{8(5ax^2-2bx)^2(5ax-b)dx}{\sqrt[3]{(5ax^2-2bx)^2}}$

РЕЗ.) $\frac{12}{7}(5ax^2-2bx)^2\sqrt[3]{5ax^2-2bx}+C$

21) $\int \frac{(18x^2+3x-3)dx}{\sqrt{(4x^3+x^2-2x)^3}}$

РЕЗ.) $C-\frac{3}{\sqrt{(4x^3+x^2-2x)}}$

22) $\int \frac{[15\sqrt{5x}-5\sqrt[5]{\frac{3}{x}}]dx}{\sqrt[3]{(12\sqrt{5x^3}-9\sqrt[5]{3x^2})^2}}$

РЕЗ.) $\frac{5}{2}\sqrt[5]{12\sqrt{5x^3}-9\sqrt[3]{3x^2}}+C$

23) $\int \frac{dx}{xlx}$

РЕЗ.) $llx+C$

24) $\int (lx^m)^n\frac{dx}{x}$

РЕЗ.) $\frac{(lx^m)^{n+1}}{m(n+1)}+C$

25) $\int sin\, nxdx$

РЕЗ.) $-\frac{1}{n}\, cosnx+C$

26) $\int \cos nx\,dx$

рез.) $\frac{1}{n}\sin nx+C$

27) $\int \frac{(a\alpha x^{\alpha-1}+b\beta x^{\beta-1}+c\gamma x^{\gamma-1}+\text{ и проч.})dx}{\sqrt[n]{(ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+\text{ и проч.})^{n-1}}}$

рез.) $n\sqrt[n]{(ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+\text{ и проч.})}+C$

28) $\int \frac{n(a\alpha x^{\alpha-1}+b\beta x^{\beta-1}+c\gamma x^{\gamma-1}+\text{ и проч.})dx}{ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+\text{и проч.}}$

рез.) $nl(ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+\text{ и проч.})+C$

29) $\int \frac{(162\sqrt[5]{2x^4}-25\sqrt[3]{3x^2}-60x)dx}{6\sqrt[5]{2x^9}-\sqrt[3]{3x^5}-2x^2}$

рез.) $15l\,(6\sqrt[5]{2x^9}-\sqrt[3]{3x^5}-2x^2)+C$

C) Интегрированіе чрезъ разложеніе.

a) Когда данныя функціи могутъ быть разложены на сумму или разность функцій, интегрируемыхъ непосредственно или чрезъ введеніе другаго перемѣннаго.

1) $\int (a+bx+cx^2+\text{ и проч.}+mx^m)dx$

рез.) $ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^3}{3}+\text{ и проч. }+\frac{mx^{m+1}}{m+1}+C$

2) $\int (5-3x+2x^2+x^3)dx$

рез.) $5x-\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+C$

3) $\int \left(\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{9}{x^3}-\frac{11}{x^4}\right)dx$

рез.) $3lx-\frac{7}{x}+\frac{9}{2x^2}+\frac{11}{3x^3}+C$

4) $\int\left(\frac{7}{x^4}-\frac{1}{x^5}+\frac{12}{5x^6}\right)dx$

рез.) $C-\frac{7}{3x^3}+\frac{1}{4x^4}-\frac{12}{25x^5}$

5) $\int\frac{(5x^2-3)dx}{\sqrt{x^3}}$

рез.) $\frac{10}{3}\sqrt{x^3}+\frac{6}{\sqrt{x}}+C$

6) $\int(5+2x)^2dx$

рез.) $25x+10x^2+\frac{4}{3}x^3+C$

7) $\int x^3(x^4-3x^2)^3dx$

рез.) $\frac{1}{16}x^{16}-\frac{9}{14}x^{14}+\frac{9}{4}x^{12}-\frac{27}{10}x^{10}+C$

8) $\int x^2(3+2\sqrt[4]{x})^3dx$

рез.) $x^3(9+\frac{216}{13}\sqrt[4]{x}+\frac{72}{7}\sqrt{x}+\frac{32}{15}\sqrt[4]{x^3})+C$

9) $\int\sqrt{x}(3\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x})^3dx$

рез.) $x^3(\frac{36}{5}\sqrt[4]{x^3}+\frac{108}{7}\sqrt{x}+\frac{144}{13}\sqrt[4]{x}+\frac{8}{3})+C$

10) $\int(\frac{3}{4}x^2-1)^3\frac{dx}{x}$

рез.) $\frac{9}{128}x^6-\frac{27}{64}x^4+\frac{9}{8}x^2-lx+C$

11) $\int\left(1-4x+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx$

рез.) $x-4x^2+15\sqrt[3]{x^2}+\frac{16}{3}x^3-24x\sqrt[3]{x^2}+75\sqrt[3]{x}+C$

12) $\int\frac{3}{4}\sqrt{x^3}(1+x^2)(2\sqrt{x}-x)^2dx$

рез.) $\frac{6}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{3x^4}{4}+\frac{1}{6}x^4\sqrt{x}+\frac{6}{11}x^5\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^6+\frac{3}{26}x^6\sqrt{x}+C$

13) $\int(5-2x^2)(3+x)^2x^3dx$

рез.) $\frac{45}{4}x^4+6x^5-\frac{13}{6}x^6-\frac{12}{7}x^7-\frac{1}{4}x^8+C$

14) $\int (1-\sqrt{x})^3 (3+5\sqrt{x^2}) \frac{dx}{7\sqrt{x^3}}$

рез.) $C - \frac{3}{7}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{90}{49}x\sqrt[6]{x} + \frac{45}{14}\sqrt[3]{x^2} + \frac{30}{7}\sqrt[6]{x} - \frac{3}{7}x + \frac{18}{7}\sqrt{x}$

$$- \frac{6}{7\sqrt{x}} - \frac{9}{7}lx$$

15) $\int \frac{dx}{sin^2 x cos^2 x}$

рез.) $tg\,x - ctg\,x + C$

16) $\int A(\alpha - \beta\, cos 2\theta + \gamma cos 4\theta) d\theta$

рез.) $A(\alpha\theta - \frac{1}{2}\beta sin 2\theta + \frac{1}{4}\gamma sin 4\theta) + C$

17) $\int \left[\frac{5}{x} - \frac{7x^3}{3(1+x^4)} + \frac{x}{7+x^2}\right] dx$

рез.) $l \frac{x^5\sqrt{7+x^2}}{\sqrt[12]{(1+x^4)^7}} + C$

b) Интегрированіе, въ томъ случаѣ, когда данныя функціи могутъ разлагаться въ ряды.

1) $\int \frac{dx}{a+x}$

рез.) $\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}$ + и проч. $+C$

Но какъ съ другой стороны:

$\int \frac{dx}{a+x} = l\,(a+x) + C'$, то

$l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4$ + и проч.$+C$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

рез.) $x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7}$ + и проч.$+C$

Но какъ съ другой стороны:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=Arc\sin x,$$ то

$$Arc\sin x=x+\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}+\text{ и проч. }+C$$

Во что обратится послѣднiй результатъ, когда $x=1$?

3) $$\int\frac{a^2dx}{a^2+x^2}$$

рез.) $x-\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^5}{5a^4}-\frac{x^7}{7a^6}+\text{ и проч. }+C$

Но какъ съ другой стороны:

$$\int\frac{a^2dx}{a^2+x^2}=a\,Arc\,tg\left(\frac{x}{a}\right)+C',$$ то

$$Arc\,tg\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{a}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{x}{a}\right)^7+\text{ и проч. }+C$$

Во что обратится послѣднiй результатъ, когда $x=a$?

4) $$\int\frac{x^mdx}{a^n+x^n}$$

рез.) $\frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n}-\frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)a^{2n}}+\frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)a^{3n}}-\text{ и проч. }+C$

5) $$\int\sqrt{(2ax-x^2)}dx$$

рез.) $2x\sqrt{2ax}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2.5}\cdot\frac{x}{2a}-\frac{1.1}{2.4.7}\cdot\frac{x^2}{4a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6.9}\cdot\frac{x^3}{8a^3}\right.$

$\left.-\text{ и проч. }\right)+C$

6) $$\int\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$$

рез.) $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}\left(1+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{x}{2a}+\frac{1.3}{2.4.5}\cdot\frac{x^2}{4a^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\cdot\frac{x^3}{8a^3}+\text{и проч.}\right)+C$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

рез.) $lx - \frac{1}{2.2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1.3}{2.4.4}\cdot\frac{1}{x^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6.6}\cdot\frac{1}{x^6}$ — и проч. $+C$

8) $\int x^n a^x dx$

рез.) $\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{la}{n+2}x^{n+2} + \frac{(la)^2}{2(n+3)}x^{n+3} + \frac{(la)^3}{2.3(n+4)}x^{n+4}$ + и проч. $+C$

9) $\int \frac{a^x dx}{x}$

рез.) $lx + lax + \frac{(la)^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{(la)^3}{2.3}\cdot\frac{x^3}{3}$ + и проч. $+C$

10) $\int \frac{dz}{lz}$

рез.) $llz + lz + \frac{(lz)^2}{2.2} + \frac{(lz)^3}{2.3.3}$ + и проч. $+C$

Послѣдній интегралъ найдется, когда въ предшествующемъ положимъ $a^x = z$ и примемъ — lla за количество постоянное.

D) Интегрированіе по частямъ.

1) $\int x\cos x dx$

рез.) $x \sin x + \cos x + C$

2) $\int dx lx$

рез.) $x(lx-1)+C$

3) $\int x^2 lx dx$

рез.) $\frac{x^3}{3}(lx - \frac{1}{3}) + C$

4) $\int xe^x dx$

РЕЗ.) $e^x(x-1)+C$

5) $\int Arcsin\, x dx$

РЕЗ.) $x Arc\, sin x \pm \sqrt{1-x^2}+C$

6) $\int Arccos\, x dx$

РЕЗ.) $x Arc\, cos\, x \mp \sqrt{1-x^2}+C$

7) $\int Arctg x dx$

РЕЗ.) $x\, Arc\, tg\, x - \frac{1}{2} l(1+x^2)+C$

8) $\int Arc\, ctg\, x dx$

РЕЗ.) $x\, Arc\, ctg\, x + \frac{1}{2} l(1+x^2)+C$

9) $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$

РЕЗ.) $\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{a^2}{2} Arc\ tg\ \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$

10) $\int \sqrt{1+\frac{p}{4x}} dx$

РЕЗ.) $x\sqrt{1+\frac{p}{4x}} - \frac{p}{8}\, l\, \frac{\sqrt{1+\frac{p}{4x}}-1}{\sqrt{1+\frac{p}{4x}}+1} + C$

11) $\int \sqrt{a^2-e^2x^2} dx$

РЕЗ.) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-e^2x^2} - \frac{a^2}{2e} Arc\ tg\ \frac{\sqrt{a^2-e^2x^2}}{ex} + C$

12) $\int e^{ax} sin x dx$

РЕЗ.) $\frac{e^{ax}(a\ sin\ x - cos\ x)}{a^2+1} + C$

13) $\int e^{ax}\cos x dx$

рез.) $\dfrac{e^{ax}(a\cos x+\sin x)}{a^2+1}+C$

Е) Нахожденіе междупредѣльныхъ Интеграловъ.

1) $\int_a^b x^m dx$

рез.) $\dfrac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$

2) $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^m}$

рез.) $\dfrac{1}{m-1}$

3) $\int_a^b (\alpha+\beta x+\gamma x^2)dx$

рез.) $-(a-b)\left\{\alpha+\frac{1}{2}\beta(a+b)+\frac{1}{3}\gamma(a^2+ab+b^2)\right\}$

4) $\int_n^m a^x dx$

рез.) $\dfrac{1}{la}\left\{a^m-a^n\right\}$

5) $\int_0^\infty a^x dx$

рез.) Полагая $a<1$ будетъ: $-\dfrac{1}{la}$

6) $\int_a^b \frac{dx}{xlx}$

РЕЗ.) $l\left(\frac{lb}{la}\right)$

7) $\int_1^\infty \frac{dx}{xlx}$

РЕЗ.) 2∞

8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

РЕЗ.) $\frac{\pi}{2}$

9) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

РЕЗ.) $\frac{\pi}{4}$

10) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

РЕЗ.) $\frac{\pi}{4}$

11) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

РЕЗ.) $\frac{\pi}{2}$

12) $\int_0^\infty \sin x dx$

РЕЗ.) $(\cos 0 - \cos\frac{1}{2}\pi) + (\cos\frac{1}{2}\pi - \cos\pi) + (\cos\pi - \cos\frac{3}{2}\pi) +$ и проч.

13) $\int_0^\infty \cos x dx$

рез.) $(\sin\frac{1}{2}\pi - \sin 0) + (\sin\pi - \sin\frac{1}{2}\pi) + (\sin\frac{3}{2}\pi - \sin\pi) +$ и проч.

Примѣчаніе. Оба послѣдніе интеграла представляются въ видѣ расходящихся рядовъ; слѣд. они не имѣютъ никакого численнаго значенія. По этому нельзя допустить, вопреки мнѣнію Пуассона и Раабе, что:

$$\int_0^\infty \sin x dx = 1; \text{ и } \int_0^\infty \cos x dx = 0.$$

ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

1. Задачи на углы и линіи, рѣшаемыя чрезъ вычисленіе.

a) Задачи на вычисленіе угловъ.

1) Прямая пересѣкаетъ двѣ непараллельныя прямыя, одинъ изъ осьми угловъ, расположенныхъ около точекъ пересѣченія, содержитъ 140°43′51″. Какъ велика сумма остальныхъ семи угловъ?

рѣш.) 579°16′9″.

2) Четыре линіи l_1, l_2, l_3 и l_4 встрѣчаются въ нѣкоторой точкѣ; уголъ $l_1 l_2$ (т.е. уголъ образуемый линіями l_1 и l_2) заключаетъ въ себѣ 48°36′, равнымъ образомъ уг. $l_1 l_3 = 136°57'$, уг. $l_2 l_4 = 189°40'$. Найти углы: $l_1 l_4$, $l_2 l_3$ и $l_3 l_4$.

рѣш.) $l_1 l_4 = 238°16'$; $l_2 l_3 = 88°21'$ и $l_3 l_4 = 101°19'$.

3) Около точки пересѣченія двухъ прямыхъ находятся четыре угла: a, b, c и d, одинъ подлѣ другаго; изъ нихъ первый содержитъ 72°18′36″. Какъ велики: 1) сумма остальныхъ угловъ, 2) уголъ d и 3) уголъ c?

рѣш.) 1) $b+c+d = 287°41'24''$; 2) $d = 107°41'24''$ и 3) $c = 72°18'36''$.

4) Полсумма двухъ угловъ треугольника (a, b) содержитъ 54°38″, а полуразность 7°15′14″. Какъ великъ каждый изъ угловъ a и b?

рѣш.) $a = 61°15'52''$; $b = 46°45'24''$.

5) Въ треугольникѣ сумма двухъ угловъ содержитъ 100°20′30″; какъ великъ будетъ каждый изъ нихъ, если одинъ болѣе другаго на 10° 40″?

рѣш.) Первый 55°10′35″; второй 45°9′55″.

6) Въ треугольникѣ три угла состоятъ въ отношеніи чиселъ 2-хъ, 3-хъ и 4-хъ; какъ великъ каждый изъ угловъ треугольника?

рѣш.) Первый 40°; второй 60°; третій 80°.

7) Какъ великъ каждый изъ внѣшнихъ угловъ равносторонняго треугольника?

рѣш.) $1\frac{1}{3}\, d$ (гдѣ d означаетъ уголъ прямой).

8) Первый внѣшній уголъ треугольника на $40'$ болѣе втораго, второй на 20^0 болѣе третьяго. Какъ великъ будетъ каждый изъ трехъ внутреннихъ угловъ треугольника?

рѣш.) Первый $=52^0 53' 20''$; второй $=53^0 33' 20''$ и третій $=73^0$ $33' 20''$.

9) Въ равнобедренномъ треугольникѣ уголъ при основаніи относится къ углу при вершинѣ какъ 2:5. Какъ великъ каждый изъ этихъ двухъ угловъ?

рѣш.) Уголъ при вершинѣ $=1\frac{1}{9}d$; уголъ при основаніи $=\frac{4}{9}d$.

10) Въ прямоугольномъ треугольникѣ, углы происшедшіе отъ продолженія гипотенузы относятся какъ 5:4. Какъ великъ каждый изъ острыхъ угловъ треугольника?

рѣш.) Первый $=\frac{1}{3}d$; второй $=\frac{2}{3}d$.

11) Подъ какимъ угломъ пересѣкаются діагонали прямоугольника, раздѣляющія каждый изъ прямыхъ угловъ его на части состоящія въ отношеніи чиселъ 1и7?

рѣш.) Одинъ уголъ $=22\frac{1}{2}{}^0$; другой $=157\frac{1}{2}{}^0$.

12) Четыре стороны прямоугольника раздѣлены пополамъ и точки дѣленія соединены прямыми линіями; одна изъ соединяющихъ линій пересѣкаетъ сторону прямоугольника подъ угломъ въ $55^0 47'$. Какъ велики углы вписаннаго четыреугольника?

рѣш.) Одинъ изъ угловъ $=111^0 34'$, а другой $=68^0 26'$.

13) Хорда раздѣляетъ окружность круга на двѣ неравныя части, состоящія въ отношеніи чиселъ 3 и 7. Какъ велики углы, имѣющіе вершины на окружности и опирающіеся сторонами на сказанную хорду?

рѣш.) Одинъ уголъ $=54^0$, а другой $=126^0$.

14) Въ кругѣ пересѣкаются двѣ хорды подъ угломъ въ $42^0 18' 50''$; сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержатъ дуги, противолежащія этому углу и углу ему вертикальному, если одна изъ нихъ болѣе другой въ 4 раза?

рѣш.) Первая дуга $=67^0 42' 8''$; вторая дуга $=16^0 55' 32''$.

15) Какъ великъ уголъ, образуемый двумя линіями, пересѣкающими окружность, когда одна изъ дугъ лежащихъ между ними въ $103^0 32'$, а другая въ $38^0 47'$?

рѣш.) Уголъ $=32^0 22' 30''$.

16) Через одинъ изъ концовъ діаметра круга проведена касательная; ее пересѣкаетъ другая прямая, идущая отъ другаго конца діаметра подъ угломъ въ $17^\circ 56'$. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ меньшая изъ дугъ, заключающихся между касательною и сѣкущею?

рѣш.) Дуга $= 144^\circ 8'$.

17) Изъ точки, лежащей внѣ круга проведены двѣ касательныя подъ угломъ въ $18^\circ 45'$. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ меньшая дуга, содержащаяся между этими касательными?

рѣш.) Дуга $= 161^\circ 15'$.

18) Изъ точки, лежащей внѣ круга, проведены къ нему двѣ касательныя и точки прикосновенія соединены прямою; отъ этого окружность раздѣлилась на двѣ части, состоящія въ отношеніи чиселъ 1 и 5. Сколько градусовъ содержитъ уголъ, образуемый двумя касательными?

рѣш.) Уголъ $= 120^\circ$.

19) Окружность круга раздѣлена на двѣ неравныя части, состоящія въ отношеніи чиселъ 2 и 7 и къ точкамъ дѣленія проведены касательныя; спрашивается, подъ какимъ угломъ онѣ пересѣкаются?

рѣш.) Уголъ $= 100^\circ$.

20) Три равные круга касаются. Сколько градусовъ заключается въ каждой дугѣ, лежащей между каждыми двумя точками прикосновенія?

рѣш.) Дуга $= 60^\circ$.

В) Задачи на вычисленіе линій.

1) По даннымъ сторонамъ треугольника (a, b, c) отыскать сторону (x) квадрата того же периметра.

рѣш.) $x = \dfrac{a+b+c}{4}$

2) Меньшей сторонѣ треугольника, равной 48 саж., проведена параллельная линія, раздѣляющая остальныя стороны треугольника на части, состоящія въ отношеніи чиселъ 5 и 7. Опредѣлить величину проведенной параллельной линіи.

рѣш.) Параллельная $= 20$ саженямъ.

3) Въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ катетъ $= 210$ фут., а другой $= 280$ фут.; на какомъ разстояніи, отъ вершины прямаго угла, слѣдуетъ провести, чрезъ меньшій катетъ линію, параллельную

большему катету, если сія послѣдняя должна быть длиною въ 162 фута?

рѣш.) Разстояніе двухъ параллелей$=88\frac{1}{2}$ футамъ.

4) Въ трапеціи большая изъ параллельныхъ сторонъ$=32$ саж.; меньшая$=14$ саж.; одна же изъ непараллельныхъ сторонъ$=28$ саж. Опредѣлить на сколько нужно продолжить сію послѣднюю, чтобы она встрѣтилась съ продолженіемъ другой непараллельной стороны.

рѣш.) Продолженіе$=21\frac{7}{9}$ саж.

5) Въ тупоугольномъ треугольникѣ проведена прямая параллельно большей сторонѣ треугольника; чрезъ что одна изъ сторонъ, содержащихъ тупой уголъ, раздѣлилась на части, состоящія въ отношеніи чиселъ 4 и 13. Опредѣлить величину другой стороны тупаго угла, когда извѣстно, что меньшій отрѣзокъ ея$=64$ фут.

рѣш.) Сторона$=272$ фут.

6) Одинъ изъ угловъ треугольника раздѣленъ прямою линіею пополамъ; отъ этого сторона, противолежащая сказанному углу, разсѣкается на части, состоящія въ отношеніи чиселъ 2 и 7. Опредѣлить меньшую сторону, раздѣленнаго угла, если большая$=19\frac{1}{4}$ фут.

рѣш.) Меньшая сторона$=5\frac{1}{2}$ фут.

7) Въ треугольникѣ уголъ дѣлится пополамъ, одна изъ сторонъ этого угла$=415$, а другая $=$ 615 фут. На какія части дѣлится, тою же линіею, третья сторона треугольника, если длина сей последней$=824$ фут?

рѣш.) Меньшая часть$=332$, а большая$=492$ футамъ.

8) Большій уголъ разносторонняго треугольника дѣлится прямою линіею пополамъ; тою же линіею большая сторона треугольника разсѣклась на двѣ части неравныя; изъ нихъ меньшая$=360$ фут. Опредѣлить каждую изъ сторонъ треугольника, когда извѣстно, что большая сторона его втрое болѣе средней и въ пять разъ болѣе меньшей.

рѣш.) Меньшая сторона$=192$, средняя$=320$, а большая $=$ 960 фут.

9) Въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ катетовъ раздѣленъ на двѣ части, состоящія въ отношеніи чиселъ 2 и 7; изъ точки дѣленія возставленъ перпендикуляръ, встрѣчающій гипотенузу. Опредѣлить длину нераздѣленнаго катета, если извѣстно, что перпендикуляръ возставленный$=88$ фут.

рѣш.) Катетъ$=396$ фут., или катетъ$=113\frac{1}{7}$ фут.

10) Высота нѣкотораго треугольника раздѣлена на двѣ неравныя части, изъ нихъ часть, прилежащая къ вершинѣ тр—ка 4 футами болѣе остальной части; чрезъ точку дѣленія проведена прямая параллельно основанію треугольника. Опредѣлить высоту треугольника, когда извѣстно, что основаніе = 8, а проведенная параллель = 5 футамъ.

рѣш.) Высота = 16 футамъ.

11) Въ прямоугольномъ треугольникѣ гипотенуза = 48 саж.; ея разстояніе отъ вершины прямаго угла = 20 саж. Опредѣлить на гипотенузѣ мѣсто подошвы перпендикуляра, измѣряющаго сказанное разстояніе.

рѣш.) Эта точка лежитъ на разстояніи 10,74 саж. отъ однаго изъ концовъ гипотенузы.

12) Опредѣлить величину катетовъ прямоугольнаго треугольника, когда извѣстно, что перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу, дѣлитъ ее на двѣ части, изъ коихъ одна = 21, а другая = 336 футамъ.

рѣш.) Одинъ катетъ = 86,6; а другой 346,3 фут.

13) Въ кругѣ, котораго радіусъ = 150 футамъ, возставленъ къ полупоперечнику перпендикуляръ, на разстояніи 6 футовъ отъ окружности, который и продолженъ до пересѣченія съ окружностью въ двухъ точкахъ; требуется опредѣлить длину полученной хорды.

рѣш.) Хорда = 84 фут.

14) Къ діаметру круга, коего длина = 87 саж., возставленъ перпендикуляръ на разстояніи 75 саж. отъ однаго изъ концовъ его; этотъ перпендикуляръ продолжается въ одну сторону до пересѣченія съ окружностію. Требуется опредѣлить длину сказаннаго перпендикуляра.

рѣш.) Перпендикуляръ = 30 саж.

15) Радіусъ круга дѣлится перпендикуляромъ, опущеннымъ на него изъ точки взятой на окружности, на двѣ части, изъ нихъ одна = 8, а другая, лежащая около центра = 12 метрамъ; требуется опредѣлить величину опущеннаго перпендикуляра.

рѣш.) Перпендикуляръ = 16 метрамъ.

16) Въ кругѣ, хорда длиною въ 30 дюймовъ, дѣлится перпендикуляромъ пополамъ, причемъ часть діаметра между хордою и дугою = 9 дюймамъ. Опредѣлить діаметръ круга.

рѣш.) Діаметръ = 34 дюймамъ.

17) Радіусъ пересѣкается подъ прямымъ угломъ хордою отстоящею отъ центра круга на 20 дюймовъ. Опредѣлить радіусъ, когда хорда=42 дюймамъ.

Рѣш.) Радіусъ=29 дюймамъ.

18) Опредѣлить величину хорды, пересѣкающей радіусъ подъ прямымъ угломъ; при чемъ часть, лежащая около центра=12 фут., а самый радіусъ болѣе этой части на 1 футъ.

Рѣш.) Хорда=10 футамъ.

19) Въ кругѣ пересѣкаются двѣ хорды; отрѣзки первой равняются 7 и 20 футамъ, отрѣзокъ же второй хорды заключаетъ въ себѣ 10 футовъ. Требуется опредѣлить вторую хорду.

Рѣш.) Вторая хорда=24 футамъ.

20) Въ кругѣ пересѣкаются двѣ хорды; большіе ихъ отрѣзки равняются 36 и 75 дюймамъ. Опредѣлить величины меньшихъ отрѣзковъ сказанныхъ хордъ, когда извѣстно, что они вмѣстѣ составляютъ $46\frac{1}{4}$ дюймовъ.

Рѣш.) Одинъ изъ отрѣзковъ=15, а другой=$31\frac{1}{4}$ дюймамъ.

21) Хорда, равная 50 линіямъ, пересѣкается другою хордою; на какія части раздѣлится первая, если отрѣзки второй равняются 4 и 28 линіямъ?

Рѣш.) Первый отрѣзокъ=47,649;а второй=2,351 линіямъ.

22) Въ кругѣ пересѣкаются двѣ хорды, изъ нихъ одна=21, а другая 24 фут. Опредѣлить величину отрѣзковъ хордъ, когда извѣстно, что меньшій изъ нихъ=6 футамъ.

Рѣш.) Длины трехъ прочихъ отрѣзковъ суть: 9,12 и18 футовъ.

23) Въ кругѣ пересѣкаются двѣ хорды; отношеніе меньшихъ отрѣзковъ равно отношенію чиселъ 2 и 5. Опредѣлить самый бо̀льшій отрѣзокъ, когда извѣстно, что меньшій отрѣзокъ изъ бо̀льшихъ = 28 дециметрамъ.

Рѣш.) Четвертый и самый бо̀льшій отрѣзокъ=70 дециметрамъ.

24) Двѣ хорды пересѣкаются въ кругѣ подъ прямымъ угломъ; отношеніе бо̀льшихъ отрѣзковъ равняется отношенію 3 къ 7. Опредѣлить величину самаго меньшаго отрѣзка, когда извѣстно, что меньшій изъ трехъ остальныхъ отрѣзковъ=56 саженямъ.

Рѣш.) Меньшій отрѣзокъ=24 саженямъ.

25) Двѣ сѣкущія взаимно пересѣкаются; 55 дюймовъ одной лежатъ внутри и 15 внѣ окружности. Какъ длинна другая сѣкущая, если 21 дюймъ оной лежитъ внѣ круга?

рѣш.) Вторая сѣкущая=50 дюймамъ.

26) Двѣ, взаимно встрѣчающіяся, сѣкущія пересѣкаютъ окружность такъ, что, находящаяся внѣ круга, часть меньшей сѣкущей 48-ю метрами менѣе другаго отрѣзка. Какъ велика эта меньшая сѣкущая и ея меньшій отрѣзокъ, когда извѣстно, что 26 метровъ большей сѣкущей лежатъ внѣ и 129 метровъ внутри окружности?

рѣш.) Меньшая сѣкущая=117 метрамъ, а меньшій ея отрѣзокъ =34,5 метра.

27) Изъ двухъ, взаимно пересѣкающихся сѣкущихъ, одна окружностію круга дѣлится пополамъ, а другая разлагается на двѣ неравныя части, изъ нихъ 130 линій приходятся на хорду и 31 линія на продолженіе оной. Какъ длинна первая сѣкущая?

рѣш.) Первая сѣкущая=99,9 линіи.

28) Изъ двухъ, взаимно пересѣкающихся сѣкущихъ, одна въ 95, а другая въ 118 метровъ длины; часть большей сѣкущей, лежащая внутри окружности, содержится къ подобной же части меньшей сѣкущей, какъ 15:8. Спрашивается: какъ велики отрѣзки обѣихъ сѣкущихъ, лежащіе внѣ окружности?

рѣш.) Отрѣзокъ большей сѣкущей=45,24 метра, а отрѣзокъ меньшей=56,2 метра.

29) Часть меньшей, изъ двухъ пересѣкающихся сѣкущихъ, лежащая внѣ круга, 10-ю дюймами длиннѣе подобной же части большей сѣкущей. Какъ длинны эти части, когда одна изъ сѣкущихъ въ 115, а другая въ 95 дюймовъ?

рѣш.) Часть меньшей сѣкущей=$57\frac{1}{2}$ дюймамъ, а часть большей=$47\frac{1}{2}$ дюймамъ.

30) Касательная въ 38 дюймовъ длиною, проведенная къ кругу, пересѣкается сѣкущею, которой длина=85 дюймамъ. Какъ велика часть сѣкущей, лежащая внутри круга?

рѣш.) Искомая часть сѣкущей=$68\frac{1}{85}$ дюйма.

31) Сѣкущая, длиною въ 76 линій, пересѣкается вдвое ея меньшею касательною, проведенною къ тому же кругу. Спрашивается: какъ велика часть сѣкущей, лежащая внѣ круга?

ръш.) Искомая часть сѣкущей$=$19 линіямъ.

32) Три фута сѣкущей лежатъ внутри и $1\frac{1}{2}$ фута внѣ окружности круга. Какъ длинна должна быть касательная, проведенная изъ конца этой сѣкущей?

ръш.) Касательная$=$2,598 фут.

33) Изъ точки, лежащей внѣ круга, проведены сѣкущая и касательная; часть сѣкущей внѣ круга составляетъ $\frac{1}{8}$ долю части, лежащей внутри его. Спрашивается: какая часть сѣкущей будетъ равна касательной?

ръш.) Касательная$=\frac{1}{3}$ сѣкущей.

34) Сѣкущая, длиною въ 40 дюймовъ, раздѣляется окружностью пополамъ; отъ конца этой сѣкущей проведена къ кругу касательная. Какъ длинна сія послѣдняя?

ръш.) Касательная$=$28,28 дюйма.

35) Къ кругу проведена касательная, которая, на разстояніи 2-хъ футовъ отъ точки прикосновенія, встрѣчается съ сѣкущею того же круга. Какъ велика часть сѣкущей, лежащая внѣ окружности, когда извѣстно, что часть, находящаяся внутри, равна касательной?

ръш.) Часть сѣкущей, лежащая внѣ окружности$=$1,23 фута.

36) Діаметръ круга продолженъ на $\frac{1}{4}$ своей длины, изъ конца сего продолженія проведена къ тому же кругу касательная. Какъ длинна сія послѣдняя, если радіусъ круга$=$3 метрамъ?

ръш.) Касательная$=$3,35 метра.

37) Какъ длинна касательная, которая 10-ю дюймами менѣе встрѣчающейся съ нею сѣкущей, когда извѣстно, что часть сѣкущей, лежащая внутри круга, равна самой касательной?

ръш.) Касательная$=$16,18 дюйма.

38) Какъ велика сѣкущая, когда пересѣкающая её касательная содержитъ 7 футовъ, и когда еще извѣстно, что часть сѣкущей внѣ круга относится къ цѣлой сѣкущей, какъ 1 къ 6?

ръш.) Сѣкущая$=$18,522 фута.

39) Въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ катетовъ$=$ 8 саж.; найти гипотенузу и другой катетъ, когда ихъ разность$=$ 4 саженямъ.

ръш.) Гипотенуза$=$10 саж., а катетъ$=$6 саженямъ.

40) Въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ катетовъ $=40$ фут. Найти гипотенузу и другой катетъ, когда извѣстно, что ихъ сумма составляетъ 80 футовъ.

рѣш.) Гипотенуза$=50$, а катетъ$=30$ футамъ.

41) Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма катетовъ$=70$ футамъ; еще извѣстны отрѣзки гипотенузы, происходящіе отъ опущенія перпендикуляра изъ вершины прямаго угла, изъ нихъ первый$=18$, а второй$=32$ футамъ. Требуется найти оба катета.

рѣш.) Одинъ изъ катетовъ$=40$, а другой 30 футамъ.

42) Прямая линія раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи; бóльшій отрѣзокъ$=12$ саженямъ. Сыскать всю прямую.

рѣш.) Вся прямая$=19,42$ сажени.

Е) Задачи на вычисленіе сторонъ многоугольниковъ, ихъ периметровъ и окружностей круговъ.

1) Въ многоугольникѣ извѣстны всѣ стороны: $L_1=18, L_2=24, L_3=30, L_4=36$ и $L_5=42$ саженямъ; требуется найти всѣ стороны въ другомъ многоугольникѣ, подобномъ первому, когда извѣстно, что меньшая его сторона $l_1=3$ саженямъ.

рѣш.) $l_2=4$, $l_3=5$, $l_4=6$, $l_5=7$.

2) Въ пятиугольникѣ даны: одна изъ сторонъ $l_1=8$ футамъ, и двѣ діагонали $d_1=20$ фут., $d_2=30$ фут. Найти соотвѣтственныя діагонали D_1 и D_2 пятиугольника, подобнаго первому, когда извѣстно, что сторона L_1, соотвѣтствующая сторонѣ l_1 многоугольника даннаго, $=40$ футамъ.

рѣш.) $D_1=100$, а $D_2=150$ футамъ.

3) Сумма периметровъ двухъ подобныхъ многоугольниковъ извѣстна, она равна 105 саженямъ. Найти каждый изъ нихъ, когда извѣстно, что отношеніе двухъ сходственныхъ сторонъ$=\frac{2}{3}$.

рѣш.) Первый периметръ$=42$ саж., а второй$=63$ саженямъ.

4) Разность периметровъ двухъ подобныхъ многоугольниковъ $=$ 7 дюймамъ; найти каждый изъ нихъ, когда отношеніе сходственныхъ сторонъ$=\frac{3}{2}$.

рѣш.) Первый периметръ$=21$, а второй$=14$ дюймамъ.

5) Въ двухъ правильныхъ одноименныхъ многоугольникахъ извѣст-

ны: въ первомъ периметръ $P=135$ аршинамъ и радiусъ круга вписаннаго $R=15$ аршинамъ. Найти периметръ (p) втораго многоугольника, когда извѣстны: его радiусъ $r=6$ ар. круга описаннаго, и отрѣзокъ сказаннаго радiуса, отъ вершины м-ка, равный 2 ар., происшедшiй отъ опущенiя перпендикуляра изъ средины стороны многоугольника.

рѣш.) Периметръ $p=44,01$ аршина.

6) Одна сторона прямоугольника менѣе другой на $m=448$ футамъ, а сiя послѣдняя на $n=64$ футамъ менѣе дiагонали. Опредѣлить величину периметра (p) прямоугольника:

рѣш.) Периметръ $p=4n+2m+4\sqrt{2n(m+n)}=2176$ фут.

7) По данной сторонѣ $b=58$ фут. и по извѣстнымъ дiагоналямъ: $D=89$ и $d=52$ фут. параллелограмма, опредѣлить его периметръ (p).

рѣш.) Периметръ $p=2\left(b+\sqrt{\frac{D^2+d^2}{2}-b^2}\right)=204,28$ фут.

8) Данъ квадратъ и его периметръ (p); въ этомъ квадратѣ вписанъ равнобедренный триугольникъ, имѣющiй общее основанiе съ квадратомъ, вершина же этого триугольника лежитъ въ срединѣ стороны квадрата. Найти периметръ p' триугольника.

рѣш.) Периметръ $p'=\frac{p}{4}(1+\sqrt{5})$.

9) Какъ велика должна быть сторона правильнаго шестиугольника, чтобы онъ могъ быть вписанъ въ кругѣ, гдѣ уже вписанъ правильный триугольникъ, имѣющiй 261 сажень въ периметрѣ?

рѣш.) Сторона шестиугольника$=50,23$ сажени.

10) Какой периметръ (p) имѣетъ правильный осьмиугольникъ, который вписанъ въ тотъ же самый кругъ, гдѣ уже вписанъ квадратъ, имѣющiй 46 фут. въ периметрѣ?

рѣш.) Периметръ $p=49,78$ фута.

11) Периметръ правильнаго десятиугольника $=846$ саж. Опредѣлить разстоянiя его центра: 1 (отъ каждой изъ сторонъ и 2) отъ каждой изъ вершинъ угловъ.

рѣш.) Разстоянiе центра отъ стороны$=130,2$; а отъ вершины угла$=136,9$ сажени.

12) Какъ велика сторона L правильнаго триугольника описаннаго

около круга имѣющаго 8 фут. въ діаметрѣ D?

рѣш.) Сторона $L=1{,}732.D=13{,}856$ фут.

13) Какъ велика сторона L правильнаго четыреугольника, описаннаго около круга, котораго радіусъ R содержитъ 50 сажень?

рѣш.) Сторона $L=2R=100$ саженямъ.

14) Какъ велика сторона L правильнаго пятиугольника, въ который вписанъ кругъ, имѣющій въ діаметрѣ D 6 сажень?

рѣш.) Сторона $L=0{,}7265.D=4{,}359$ сажени.

15) По сторонѣ $L=25$ саж. правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругѣ, опредѣлить сторону L_1, правильнаго треугольника описаннаго около тогоже круга.

рѣш.) Сторона $L_1=2L=50$ саж.

16) По сторонѣ $L=12$ саж. правильнаго четыреугольника, вписаннаго въ кругѣ, отыскать сторону L_1 квадрата описаннаго около того же круга.

рѣш.) Сторона $L_1=1{,}4142.L=16{,}97$ сажени.

17) По данной сторонѣ $L=128$ фут. правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, отыскать сторону L_1 правильнаго пятиугольника описаннаго около тогоже круга.

рѣш.) Сторона $L_1=1{,}236.L=158{,}2$ фута.

18) Какъ великъ діаметръ D круга, вписаннаго въ правильный треугольникъ, который имѣетъ въ периметрѣ (p) 83 метра?

рѣш.) Діаметръ $D=0{,}19245.p=15{,}97$ метра.

19) Какъ великъ діаметръ D круга, который вписанъ въ правильный пятиугольникъ, имѣющій въ периметрѣ (p) $35\frac{2}{3}$ саж.?

рѣш.) Діаметръ $D=0{,}275.p=9{,}81$ сажени.

20) Какъ великъ діаметръ D круга вписаннаго въ правильный шестиугольникъ, имѣющій въ периметрѣ (p) 113 футовъ?

рѣш.) Діаметръ $D=0{,}28867.p=32{,}62$ фута.

21) По сторонѣ $L=15\frac{1}{2}$ саж., правильнаго треугольника описаннаго около круга, опредѣлить сторону L_1 правильнаго треугольника вписаннаго въ тотъ же самый кругъ.

рѣш.) Сторона $L_1=\frac{1}{2}L=7{,}75$ саж.

22) По сторонѣ $L=136$ фут. правильнаго пятиугольника описан-

наго около круга, вычислить сторону L_1 правильнаго пятиугольника вписаннаго въ тотъ же кругъ.

рѣш.) Сторона $L_1 = 0{,}809 . L = 110{,}024$ фута.

23) По данному радіусу круга $R=8$ фут., найти окружность С. (*)

рѣш.) Окружность $C = 2\pi R = 50{,}26$ фута.

24) По данной окружности круга $C = 22{,}775875$ метра, найти діаметръ D.

рѣш.) Діаметръ $D = \frac{C}{\pi} = 7\frac{1}{4}$ метра.

25) По данному радіусу круга $R=20$ фут., найти длину дуги въ 42^0.

рѣш.) Дуга $= \frac{42^0}{180^0} R\pi = 14{,}66$ фут.

26) По даннымъ: радіусу круга $R = 16$ метрамъ и длинѣ дуги этого круга $a = 12{,}566$ метра, найти число градусовъ дуги.

рѣш.) Дуга $= 45^0$.

27) Сколько градусовъ заключаетъ въ себѣ дуга, равная по длинѣ своей радіусу соотвѣтственнаго круга?

рѣш.) Число градусовъ дуги $= 57^0{,}29746 = 57^0 17' 51''$.

28) По данной окружности круга $C = 18$ саж., отыскать длину дуги (a) въ 150^0.

рѣш.) $a = \frac{150^0 . 18}{360^0} = 7\frac{1}{2}$ саженямъ.

29) Дуга въ 200^0, по длинѣ $=80$ фут.; найти радіусъ R соотвѣтствующаго круга.

рѣш.) Радіусъ $R = \frac{180^0 . 80}{200^0 . \pi} = 22{,}92$ фута.

30) Діаметръ круга вмѣстѣ съ окружностію $=36$ фут. Требуется найти діаметръ и окружность порознь.

рѣш.) Окружность $=27{,}31$ фута, а діаметръ $=8{,}69$ фута.

31) Разность между окружностію и діаметромъ есть 12 ар. Найти діаметръ и окружность порознь.

рѣш.) Окружность $=17\frac{3}{5}$ ар., а діаметръ $=5\frac{3}{5}$ аршина.

32) Три четверти нѣкоторой окружности составляютъ 30 саженъ. Требуется опредѣлить другую окружность, которой радіусъ соста-

---

(*) Въ этой задачѣ и слѣдуюшихъ принимается $\pi = 3{,}1415$.

ляетъ $\frac{2}{3}$ радіуса окружности первой.

рѣш.) Искомая окружность $=26,665$ сажени.

33) Отношеніе радіусовъ двухъ окружностей $=\frac{n}{m}$; при чемъ извѣстно, что первая длиннѣе второй на (q) футовъ. Найти обѣ окружности.

рѣш.) Первая окружность $=\frac{nq}{n-m}$; вторая же $=\frac{mq}{n-m}$.

34) Два равные круга, коихъ радіусъ $R=6$ дюймамъ, касаются. Требуется найти касательную t, проведенную изъ центра однаго къ окружности другаго.

рѣш.) Длина касательной $t=R.\sqrt{3}=10,39$ дюйма.

35) Два равные круга касаются; касательная t, проведенная изъ центра однаго къ окружности другаго, равняется $8\frac{1}{2}$ саж. Требуется найти радіусъ R этихъ круговъ.

рѣш.) Радіусъ $R=\frac{t}{3}\sqrt{3}=4,907$ саж.

36) Два различные круга касаются; изъ центра бо́льшаго изъ нихъ проведена касательная $t=3,8$ фута къ окружности меньшаго. Требуется опредѣлить радіусъ r ме́ньшаго круга, когда извѣстно, что онъ составляетъ половину радіуса круга бо́льшаго.

рѣш.) Радіусъ $r=\frac{1}{4}t.\sqrt{2}=1,343$ фута.

37) Около круга, коего радіусъ $R=3$ фут. описаны шесть круговъ того же радіуса; всѣ эти круги касаются первому, а также и между собою—по два каждые. Требуется опредѣлить разстояніе d центра перваго круга отъ каждой изъ точекъ прикосновенія двухъ круговъ.

рѣш.) Разстояніе $d=R.\sqrt{3}=5,196$ фута.

38) По длинѣ линіи $a=15$ саж., соединяющей центры, и по разстоянію окружностей двухъ равныхъ круговъ $d=1\frac{1}{2}$ сажен., изъ коихъ одинъ лежитъ внѣ другаго, найти длину общей имъ касательной t, опредѣляемой двумя точками прикосновенія, лежащими на двухъ различныхъ сторонахъ линіи центральной.

рѣш.) Касательная $t=\sqrt{(2a-d)d}=6,538$ саж.

39) По даннымъ радіусамъ $R=7$ и $r=5$ фут., двухъ пересѣкающихся круговъ и общей хордѣ $a=9$ фут., опредѣлить величину линіи (b) соединяющей центры.

рѣш.) Линія $b=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}=7,54$ фут.

40) Опредѣлить разстояніе d двухъ неравныхъ окружностей круговъ лежащихъ одинъ внѣ другаго, когда извѣстны: 1) длина касательной $t=9$ дюймамъ, содержащейся между точками прикосновенія, расположенными по обѣимъ сторонамъ линіи центральной и 2) разстояніе центровъ круговъ $a=2,8$ фута.

Рѣш.) Разстояніе $d=a-\sqrt{(a+t)(a-t)}=0,1$ дюйма.

41) Два круга, которыхъ центры отстоятъ на $a=2$ фут. и которыхъ радіусы R и r равняются, соотвѣтственно, 4 и 3 футамъ, пересѣкаются. Требуется отыскать общую ихъ хорду c.

Рѣш.) Общая хорда $c=\frac{1}{a}\sqrt{(R+r+a)(R+r-a)(R+a-r)(r+a-R)}$ $=5,809$ фут.

42) Кругъ вписанъ въ треугольникѣ, коего стороны суть: $a=7$ $b=8$ и $c=9$ метрамъ. Требуется найти діаметръ D этого круга.

Рѣш.) Діаметръ $D=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a+b+c}}=4,47$ мет.

43) По тремъ сторонамъ $a=4, b=8$ и $c=10$ фут. треугольника вписаннаго, требуется найти радіусъ R круга.

Рѣш.) Радіусъ $R=\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$ $=5,26$ фута.

44) Въ кругѣ вписанъ четыреугольникъ, коего стороны даны: $a=49, b=72, c=15$ и $d=46$ футамъ. Требуется найти обѣ діагонали D_1 и D_2 этого четыреугольника.

Рѣш.) Діагональ $D_1=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+dc)}{ad+bc}}=71,55$ фута.

. . . . $D_2=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}=56,56$ фута.

45) По четыремъ сторонамъ, $a=9, b=14, c=3$ и $d=11$ саженямъ, четыреугольника вписаннаго, найти радіусъ R соотвѣтственнаго круга.

Рѣш.) Радіусъ $R=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{[(a+b)^2-(c-d)^2]\cdot[(c+d)^2-(a-b)^2]}}$ $=7,144$ сажени.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

1. Задачи на площади, рѣшаемыя чрезъ вычисленіе.

a) Построеніе площадей.

1) Построить прямоугольникъ, коего площадь равнялась бы разности двухъ данныхъ квадратовъ (a^2, b^2).

рѣш.) Бо̀льшая сторона $x = a + b$, меньшая $y = a - b$.

2) Построить квадратъ, равный одной трети даннаго.

рѣш.) Сторона квадрата $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

3) На данной прямой m построить прямоугольникъ, коего площадь была бы среднею ариѳметическою между двумя данными прямоугольниками (BH, bh). (*)

рѣш.) Высота $x = \frac{BH + bh}{2m}$

4) На данной прямой m построить прямоугольникъ, равномѣрный двойной суммѣ двухъ данныхъ квадратовъ (a^2, b^2).

рѣш.) Высота $x = \frac{2(a^2 + b^2)}{m}$

5) Построить прямоугольникъ, равномѣрный суммѣ двухъ данныхъ (BH, bh), и котораго высота равнялась бы суммѣ ихъ основаній.

рѣш.) Основаніе $x = \frac{BH + bh}{B + b}$

6) Построить прямоугольникъ, равномѣрный суммѣ двухъ данныхъ (BH, bh), и котораго высота равнялась бы разности ихъ основаній.

рѣш.) Основаніе $x = \frac{BH + bh}{B - b}$

(*) Буквою B будемъ означать основаніе, буквою же H высоту; такъ что BH выразитъ числовое значеніе самой площади прямоугольника.

7) На діагонали даннаго прямоугольника BH построить прямоугольникъ ему равномѣрный.

рѣш.) Высота $x=\frac{BH}{\sqrt{B^2+H^2}}$

8) Построить прямоугольникъ, равномѣрный данному BH, и котораго основаніе было бы среднею ариѳметическою величиною между основаніемъ и высотою даннаго.

рѣш.) Высота $x=\frac{2BH}{B+H}$

9) Построить прямоугольникъ, равномѣрный данному BH, и котораго высота была бы среднею геометрическою величиною между основаніемъ и высотою даннаго.

рѣш.) Основаніе $x=\sqrt{BH}$

10) Построить прямоугольникъ, равномѣрный данному BH, и котораго высота была бы среднею геометрическою величиною между основаніемъ и діагональю даннаго.

рѣш.) Основаніе $x=H\sqrt{\frac{B}{\sqrt{B^2+H^2}}}$

11) Построить прямоугольникъ, когда даны: его діагональ d и периметръ p.

рѣш.) Стороны этого прямоугольника будутъ:

$$x=\frac{p}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{8d^2-p^2};\ y=\frac{p}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{8d^2-p^2}$$

12) Построить прямоугольникъ, когда извѣстна разность сторонъ его (a) и также разность квадратовъ сихъ сторонъ (b^2).

рѣш.) Стороны x и y этого прямоугольника будутъ:

$$x=\frac{b^2}{2a}+\frac{1}{2}a;\ y=\frac{b^2}{2a}-\frac{1}{2}a$$

13) На данной прямой m построить прямоугольникъ равновеликій площадью суммѣ трехъ данныхъ квадратовъ (a^2, b^2, c^2).

рѣш.) Высота $x=\frac{a^2+b^2+c^2}{m}$

14) Даны два квадрата ($a^2>b^2$); требуется построить, на діагонали большаго, прямоугольникъ, коего площадь равнялась бы разности данныхъ квадратовъ.

Рѣш.) Высота $x=\dfrac{a^2-b^2}{a\sqrt{2}}$

15) Раздѣлить данную прямую (a) на двѣ неравныя части такъ, чтобы построенный изъ нихъ прямоугольникъ равнялся бы $\frac{1}{3}$ части даннаго прямоугольника *BH*.

Рѣш.) Одна часть $x=\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{3}BH}$

16) Около даннаго квадрата (a^2) описать треугольникъ, такъ, чтобы одна сторона квадрата лежала на сторонѣ треугольника, а надъ другими тремя сторонами квадрата находились бы три равные площадями треугольника.

Рѣш.) Высота каждаго треугольника $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

17) Построить прямоугольникъ, равномѣрный площадью данному квадрату (a^2), но котораго периметръ былъ бы вдвое болѣе периметра даннаго квадрата.

Рѣш.) Одна изъ сторонъ прямоугольника $x=2a\pm\sqrt{3a^2}$

18) Построить прямоугольникъ, котораго площадь, къ площади даннаго квадрата (a^2), относилась бы, какъ 1 къ 4; а периметръ къ периметру даннаго квадрата, какъ 4 къ 1.

Рѣш.) Одна изъ сторонъ прямоугольника $x=4a\pm\sqrt{(4a)^2-(\frac{1}{2}a)^2}$

19) На сколько увеличится гипотенуза прямоугольнаго треугольника, если каждый изъ его катетовъ (a,b) увеличится на единицу мѣры?

Рѣш.) Увеличеніе $x=-\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}$

20) По даннымъ тремъ сторонамъ (a,b,c) треугольника и высотѣ (h) построить прямоугольникъ, равный по площади и по периметру данному треугольнику.

Рѣш.) Обѣ стороны прямоугольника (x,y) будутъ:

$$x=\frac{a+b+c}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2-2bh}$$

$$y=\frac{a+b+c}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2-2bh}$$

21) Построить прямоугольникъ, вдвое болѣе даннаго BH и у котораго квадратъ, построенный на діагонали, былъ бы вчетверо болѣе даннаго квадрата (a^2).

рѣш.) Обѣ стороны прямоугольника (x,y) будутъ:

$$x=\sqrt{a^2+BH}+\sqrt{a^2-BH}$$
$$y=\sqrt{a^2+BH}-\sqrt{a^2-BH}$$

22) Построить прямоугольный треугольникъ, равномѣрный площадью данному прямоугольнику BH, и у котораго квадратъ, построенный на гипотенузѣ, равнялся бы данному квадрату (a^2).

рѣш.) Оба катета (x,y) будутъ:

$$x=\frac{\sqrt{a^2+4BH}+\sqrt{a^2-4BH}}{2};$$

$$y=\frac{\sqrt{a^2+4BH}-\sqrt{a^2-4BH}}{2}$$

b) Нахожденіе числовыхъ значеній площадей.

1) Какую площадь имѣетъ равносторонній треугольникъ, коего сторона вмѣстѣ съ высотою содержатъ $m=804$ футамъ?

рѣш.) Площадь $s=0,124m^2=80155,58$ □ футовъ.

2) По данной площади $s=100$ □ фут., равносторонняго треугольника, опредѣлить его периметръ p и высоту h.

рѣш.) Периметръ $p=4,559\sqrt{s}=45,59$; $h=1,316\sqrt{s}=13,16$ фута.

3) Опредѣлить площадь s, равнобедреннаго треугольника, по одной изъ равныхъ сторонъ $c=1$ фут. и основанію $b=\frac{1}{2}$ фута.

рѣш.) Площадь $s=\frac{1}{4}b\sqrt{(2c+b)(2c-b)}=0,24206$ □ фута.

4) По периметру $p=702$ саж. и высотѣ $h=140$ саж., равнобедреннаго треугольника, опредѣлить его площадь s.

рѣш.) Площадь $s=\dfrac{(p+2h)(p-2h)h}{4p}=20661$ □ саж.

5) По периметру $p=2$ милямъ и основанію $b=\frac{3}{4}$ мили, равнобедреннаго треугольника, вычислить его площадь s.

рѣш.) Площадь $s=\frac{1}{4}b\sqrt{p(p-2b)}=\frac{3}{16}$ □ мили.

6) По одному изъ равныхъ боковъ $c=80$ саж. и высотѣ $h=60$ саж., равнобедреннаго треугольника, опредѣлить его площадь s.

рѣш.) Площадь $s=h\sqrt{(c+h)(c-h)}=3174,9$ □ саж.

7) Вычислить площадь s равнобедреннаго треугольника, когда одна изъ равныхъ сторонъ вмѣстѣ съ основаніемъ содержатъ $m=15$ саж., и таже самая сторона съ высотою составляютъ $n=20$ саж.

рѣш.) Площадь $s=12n^2+6mn-(m+7n)\sqrt{3n^2+2mn}=$ 24 □ саж.

8) Вычислить площадь s равнобедреннаго треугольника, если периметръ его $p=16$ метрамъ, а высота съ основаніемъ, вмѣстѣ, составляютъ $q=10$ метрамъ.

рѣш.) Площадь $s=\frac{1}{8}[3pq-\frac{3}{2}p^2\mp(\frac{1}{2}p-q)\sqrt{5p^2-8pq}]=$ 12 □ мет.

9) По одному изъ равныхъ боковъ $c=100$ фут. и площади $s=1000$ □ фут., равнобедреннаго треугольника, опредѣлить его периметръ p.

рѣш.) Периметръ $p=2c+\sqrt{c^2+2s}\pm\sqrt{c^2-2s}=398,98$ фут. или $p=220,1$ фут.

10) По данной сторонѣ $a=12$ сажен., равносторонняго треугольника, и одному изъ равныхъ боковъ равнобедреннаго $c=21\frac{1}{2}$ саж., опредѣлить высоту и основаніе послѣдняго, когда оба треугольника равномѣрны.

рѣш.) Высота $h=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2\mp\sqrt{4c^4-3a^4}}$, откуда $h=2,9$ или 21,3 саж.

Основаніе $b=\sqrt{2c^2\pm\sqrt{4c^4-3a^4}}$, откуда $b=42,6$ или 5,9 саж.

11) Какъ велика гипотенуза c прямоугольнаго треугольника, коего площадь $s=5000$ □ фут., а катетъ $a=164$ фут?

рѣш.) Гипотенуза $c=\frac{1}{a}\sqrt{a^4+4s^2}=174,97$ фут.

12) Какъ велика гипотенуза c, прямоугольнаго треугольника, когда извѣстно, что периметръ его $p=18,2$ метра, а площадь $s=14,28$ □ метра?

рѣш.) Гипотенуза $c=\frac{p^2-4s}{2p}=7,53$ метра.

13) Опредѣлить периметръ прямоугольнаго треугольника по площади его s, равной 4 □ мил. и одному изъ катетовъ b, заключающему $1\frac{7}{8}$ мили.

рѣш.) Периметръ $p=b+\frac{2s}{b}+\frac{1}{b}\sqrt{b^4+4s^2}=10,78$ мили.

14) Въ прямоугольномъ треугольникѣ оба катета содержатъ $m=28$ фут., гипотенуза же съ меньшимъ катетомъ, вмѣстѣ, заключаютъ $n=32$ фут. Найти площадь s и периметръ p, сказаннаго треугольника.

рѣш.) Площадь $s=\frac{1}{2}[-3n^2+3mn\pm(2n-m)\sqrt{2n(n-m)}]=96$ □ фут.

Периметръ $p=2n\mp\sqrt{2n(n-m)}=48$ фут.

15) Въ прямоугольномъ треугольникѣ периметръ болѣе гипотенузы на $n=272$ саж. Найти площадь s треугольника, когда извѣстно, что сказанная гипотенуза превышаетъ одинъ изъ катетовъ на $m=16$ саженямъ.

рѣш.) Площадь $s=\frac{1}{2}[-3m^2-3mn+(2m+n)\sqrt{2m(m+n)}]=7680$ □ саж.

16) По разности двухъ катетовъ $m=7$ фут., и суммѣ $n=32$ фут. гипотенузы и большаго катета, найти площадь s и периметръ p треугольника.

рѣш.) Площадь $s=\frac{1}{2}[3n^2-3mn-(2n-m)\sqrt{2n(n-m)}]=60$ □ фут.

Периметръ $p=\sqrt{2n(n-m)}=40$ фут.

17) По площади $s=7776$ □ саж. и по разстоянію $h=86,4$ саж. вершины прямаго угла отъ гипотенузы, вычислить оба катета a и b прямоугольнаго треугольника.

рѣш.) Катетъ $a=\sqrt{\frac{2s}{h}\left(\frac{s}{h}+\sqrt{\frac{s^2}{h^2}-h^2}\right)}=144$ саж.

Катетъ $b=\sqrt{\frac{2s}{h}\left(\frac{s}{h}-\sqrt{\frac{s^2}{h^2}-h^2}\right)}=108$ саж.

18) Если въ прямоугольномъ треугольникѣ, коего площадь $s=2400$ □ саж., изъ вершины прямаго угла опустимъ перпендикуляръ на гипотенузу, то весь треугольникъ раздѣлится на двѣ части, изъ коихъ меньшая $v=800$ □ саж. Какъ велики катеты a и b даннаго треугольника?

рѣш.) Катетъ $a=\sqrt[4]{\frac{4vs^2}{s-v}}=58,26$ саж.

Катетъ $b=\sqrt[4]{\frac{s-v}{4vs^2}}=82,4$ саж.

19) Прямоугольный треугольникъ содержитъ 840 □ саж. и образуетъ очень узкую полосу; ибо одинъ изъ катетовъ $=480$ саж. Чтобы привести оба катета къ бо́льшему равенству, нѣкто думаетъ одинъ изъ нихъ укоротить, а другой удлиннить на 200 саж. Останется ли при этомъ площадь треугольника неизмѣнною?

рѣш.) Новый треугольникъ будетъ болѣе даннаго на 27650 □ сажень.

20) По данной площади $s=150$ □ саж. тр-ка вычислить его основаніе и высоту, когда извѣстно что 1-ое втрое болѣе 2-ой.

рѣш.) Основаніе $b=\sqrt{6s}=30$ саж.

Высота $h=\sqrt{\frac{2s}{3}}=10$ саж.

21) По тремъ даннымъ сторонамъ треугольника: $a=10$, $b=21$,

$c=17$ саж. вычислить его площадь s.

Рѣш.) Площадь $s=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}=$ 84 □ саж.

22) По данной площади $s=100$ □ метр., по периметру $p=200$ метрамъ и одной изъ сторонъ $c=80$ метр. отыскать остальныя стороны, a и b, тр-ка.

Рѣш.) Сторона $b=\frac{p-c}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{c^2-\frac{16s^2}{p(p-2c)}}=99,93$ метра.

$$. \;.\; .\; a=\frac{p-c}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{c^2-\frac{16s^2}{p(p-2c)}}=20,07 \text{ метра.}$$

23) Въ треугольникѣ одна сторона (c) содержитъ 8 метровъ, другая (b) 9 метровъ и цѣлый периметръ $p=30$ метрамъ. Найти площадь s этого треугольника.

Рѣш.) Площадь $s=\frac{1}{4}\sqrt{p(p-2c)(p-2b)(2b+2c-p)}=$ 35,496 □ метра.

24) По периметру $p=1080$ саж., одной сторонѣ $a=340$ саж. и высотѣ $h=144$ саж., найти площадь s треугольника.

Рѣш.) Площадь $s=\frac{h}{4}\cdot\frac{p(p-2a)(p-a+\sqrt{a^2-h^2})}{p(p-2a)+h^2}=36000$ □ саж.

25) Въ косоугольномъ тр-кѣ одна сторона равняется высотѣ, а другая болѣе ея вдвое. Какъ великъ периметръ p, когда площадь $s=9800$ □ сажень?

Рѣш.) Периметръ $p=(3+\sqrt{5\pm 2\sqrt{3}}).\sqrt{2s}$;

Слѣд. $p=827,3$ или $p=593,5$ саж.

26) Площадь s прямоугольника составляетъ 706 □ футовъ; его длина относится къ ширинѣ такъ, какъ 3:2. Опредѣлить длину и ширину.

Рѣш.) Длина $=32,542$ } фута.
Ширина $=21,695$ }

27) Найти площадь s прямоугольника, въ которомъ одна изъ сторонъ b равняется $31\frac{3}{4}$ фута, а сумма діагонали D съ другою стороною h составляетъ $n=60\frac{1}{8}$ фута.

рѣш.) Площадь $s=\frac{b(n^2-b^2)}{2n}=688,322$ □ фут.

28) Въ прямоугольникѣ извѣстны: сумма неравныхъ сторонъ $m=10$ фут. и площадь $s=24$ □ фут. Найти основаніе b и высоту h.

рѣш.) Длины обѣихъ сторонъ получатся изъ формулы:

$b=\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\frac{1}{4}m^2-s}$; откуда:

основаніе $b=6$ или 4 футамъ,

а высота $h=4$ или 6 футамъ.

29) По площади $s=194,4$ □ метр. и діагонали $d=23,4$ мет., равноугольнаго параллелограма, опредѣлить длину его h и ширину b.

рѣш.) Длина $h=\frac{1}{2}(\sqrt{d^2+2s}+\sqrt{d^2-2s})=21,6$ метра.

Ширина $b=\frac{1}{2}(\sqrt{d^2+2s}-\sqrt{d^2-2s})=9$ метрамъ.

30) По суммѣ $m=48,8$ саж. и разности $n=16$ саж., двухъ неравныхъ сторонъ прямоугольника, опредѣлить его площадь s.

рѣш.) Площадь $s=\frac{(m+n)(m-n)}{4}=531,36$ □ саж.

31) Одна сторона прямоугольника менѣе другой на $m=448$ фут., а эта вторая на $n=64$ фут. менѣе діагонали. Опредѣлить площадь s этого прямоугольника.

рѣш.) Площадь $s=3n^2+3mn+(m+2n)\sqrt{2n(m+n)}=245760$ □ футамъ.

32) По данной сторонѣ $b=54$ саж. и разстоянію $e=15$ саж., точки пересѣченія діагоналей отъ данной стороны, опредѣлить площадь s ромба.

рѣш.) Площадь $s=2be=1620$ □ футамъ.

33) По даннымъ двумъ сторонамъ $a=8$ саж., $b=12$ саж. и по данной діагонали $d=16$ саж., опредѣлить площадь s косоугольнаго параллелограма.

рѣш.) Площадь $s=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+d)(a+b-d)(a+d-b)(b+d-a)}$ $=92,95$ □ саж.

34) По данному периметру $p=130$ саж., одной сторонѣ $b=38$ саж. и діагонали $d=60$ саж., опредѣлить площадь s параллелограма.

рѣш.) Площадь $s=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p}{2}+d\right)\left(\frac{p}{2}-d\right)\left(d+2b-\frac{p}{2}\right)\left(d+\frac{p}{2}-2b\right)}=$ 737,3 □ саж.

35) По площади $s=1211,4$ □ фут. параллелограма, одной сторонѣ его $b=44$ фут. и разстоянію $e=19,2$ фута, средины діагонали отъ другой стороны, опредѣлить периметръ p этого четыреугольника.

рѣш.) Периметръ $p=2b+\frac{s}{e}=151,1$ фут.

36) По периметру $p=160$ саж., діагонали $d=51$ саж. и разстоянію $e=50$ саж., двухъ параллельныхъ сторонъ параллелограма, опредѣлить его площадь s.

рѣш.) Площадь $s=\frac{\left(\frac{p}{2}+d\right)\left(\frac{p}{2}-d\right)e}{p-2\sqrt{(d+e)(d-e)}}=1357,8$ □ саж.

37) По данной площади $s=2472$ □ фут. параллелограма, его діагонали $d=93$ фут. и одной сторонѣ $b=80$ фут., опредѣлить периметръ p.

рѣш.) Периметръ $p=2b+2\sqrt{d^2+b^2\pm2\sqrt{b^2d^2-s^2}}$; слѣдоват. $p=501,08$ или $p=223,7$ фут.

38) Опредѣлить площадь трапеціи по двумъ не параллельнымъ сторонамъ: $a=29, b=22$ саж., когда еще извѣстны: длина одной изъ параллельныхъ сторонъ $g=54$ саж. и разстояніе ея $h=20$ саж. отъ другой параллельной.

рѣш.) Площадь $s=\frac{h}{2}(2g\pm\sqrt{a^2-h^2}\pm\sqrt{b^2-h^2})=1381,6$; или 1198,4; или 961,6; или 778,4 □ саж.

39) Опредѣлить площадь трапеціи по периметру $p=105$ фут., по не параллельнымъ сторонамъ $a=24$ фут., $b=21$ фут. и по разстоянію $h=20$ фут. параллельныхъ сторонъ.

рѣш.) Площадь $s=(p-a-b)\frac{h}{2}=600$ □ фут.

40) Опредѣлить площадь s трапеціи по двумъ діагоналямъ: $D=$

38 саж., $d=33$ саж. и разстоянію $h=20$ саж. параллельныхъ сторонъ.

рѣш.) Площадь $s=(\sqrt{D^2-h^2}+\sqrt{d^2-h^2})\frac{h}{2}=585,6$ □ саж.

41) По суммѣ $f=102$ фут., и разности $k=18$ фут. параллельныхъ сторонъ, а также по суммѣ $m=86$ фут. и разности $n=14$ фут. не параллельныхъ сторонъ, опредѣлить площадь s трапеціи.

рѣш.) Площадь $s=\frac{f}{4k}\sqrt{(m+k)(m-k)(k+n)(k-n)}=$ 1347,85 □ фут.

c) Числовыя задачи на вычисленіе площадей правильныхъ многоугольниковъ и круговъ.

1) Какъ велика площадь s правильнаго треугольника, описаннаго около круга, коего діаметръ $d=15$ футамъ?

рѣш.) Площадь $s=5,196r^2=292,275$ □ фут.

2) Какъ велика площадь s правильнаго пятиугольника, описаннаго около круга, коего діаметръ $d=5$ саженямъ?

рѣш.) Площадь $s=3,6327r^2=22,704$ □ саж.

3) По сторонѣ $l=12$ дюймамъ правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругѣ, опредѣлить площадь s правильнаго треугольника, описанаго около того же круга.

рѣш.) Площадь $s=1,732l^2=249,408$ □ дюйм.

4) По сторонѣ $l=30\frac{1}{2}$ метрамъ правильнаго четыреугольника, вписаннаго въ кругѣ, опредѣлить площадь, описаннаго около того же круга квадрата.

рѣш.) Площадь $s=2l^2=1860\frac{1}{2}$ □ метр.

5) По данной сторонѣ $l=16$ саж. правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, отыскать площадь s правильнаго пятиугольника, описаннаго около того же круга.

рѣш.) Площадь $s=2,628l^2=672,77$ □ саж.

6) По площади $s=113\frac{1}{4}$ □ саж. правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругѣ, опредѣлить площадь s' правильнаго треугольника, около него описаннаго.

рѣш.) Площадь $s'=4s=453$ □ саж.

7) По площади $s=724$ □ футамъ правильнаго четыреугольника вписаннаго, опредѣлить площадь квадрата s', описаннаго около того же круга.

рѣш.) Площадь $s'=2s=1448$ □ футамъ.

8) По площади $s=3\frac{1}{2}$ □ милямъ правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, опредѣлить площадь s' правильнаго пятиугольника описаннаго.

рѣш.) Площадь $s'=1,528s=5,35$ □ мил.

9) По площади $k=452,376$ □ сажени и полупоперечнику $r=12$ саж., вычислить окружность круга c.

рѣш.) Окружность $c=\frac{2k}{r}=75,396$ саж.

10) По площади круга $k=706,8375$ □ метра, опредѣлить радіусъ r и окружность c.

рѣш.) Радіусъ $r=\sqrt{\frac{k}{\pi}}=15$ метрамъ;

окружность $c=2\sqrt{k\pi}=94,245$ □ метра.

11) По окружности $c=7,85375$ мили и діаметру $d=2\frac{1}{2}$ мили, опредѣлить площадь k соотвѣтствующаго круга.

рѣш.) Площадь $k=\frac{1}{4}dc=4,908$ □ мили.

12) По данной окружности $c=22,775875$ метра опредѣлить діаметръ d круга и его площадь k.

рѣш.) Діаметръ $d=\frac{c}{\pi}=7\frac{1}{4}$ метра.

Площадь $k=\frac{c^2}{4\pi}=41,28$ □ метра.

13) По площади круга $k=113,094$ □ саж. отыскать длину дуги a, имѣющей $n=15$ градусовъ, а также и площадь соотвѣтствующаго этой дугѣ вырѣзка A.

рѣш.) Длина дуги $a=\frac{n^0}{180^0}\sqrt{k\pi}=1,57$ саж.

Площадь вырѣзка $A=\frac{n^0}{360^0}k=4,71$ □ саж.

14) По площади круга $k=201,056$ □ саж. и длинѣ дуги $a=30$ саж. отыскать число градусовъ n, сказанной дуги, а также и величину площади A соотвѣтствующаго вырѣзка.

рѣш.) Число градусовъ $n=\frac{180.a}{\sqrt{k\pi}}=214^052'$.

Площадь вырѣзка $A=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{k}{\pi}}=120$ □ саж.

15) По площадямъ $k=2880$ □ дюймамъ цѣлаго круга и вырѣзка его $A=98$ □ дюйм. опредѣлить длину a и число градусовъ n дуги вырѣзка.

рѣш.) Длина дуги вырѣзка $a=2A\sqrt{\frac{\pi}{k}}=6,47$ дюйма.

Число градусовъ ея $n=\frac{360^0 A}{k}=12^0 15'$.

16) По площади $A=1519,173$ □ метра вырѣзка и діаметру круга $d=80$ метрамъ, вычислить длину соотвѣтственной дуги a и число ея градусовъ n.

рѣш.) Длина дуги $a=\frac{2A}{r}=75,9586$ метра.

Число градусовъ $n=\frac{360^0 . A}{r^2 \pi}=108^0 48'$.

17) По площади вырѣзка $A=6$ □ дюйм. и длинѣ соотвѣтствующей дуги $a=6$ дюйм. найти радіусъ r круга и число градусовъ n дуги вырѣзка.

рѣш.) Радіусъ $r=\frac{2A}{a}=2$ дюймамъ.

Число градусовъ $n=\frac{90^0 . a^2}{A\pi}=171^0 53' 33''$.

18) Площадь круга $k=78,5375$ □ саж. должна быть удвоена; на сколько должно, для этого, удлиннить радіусъ r?

рѣш.) Удлинненіе $=0,4142\sqrt{\frac{k}{\pi}}=2,07$ сажени.

19) Изъ центра круга, коего діаметръ $d=100$ футамъ, должны быть описаны два круга такъ, чтобы ихъ окружностями, площадь даннаго круга, дѣлилась на три равныя части. Какъ велики должны быть радіусы R_1 и R_2 этихъ круговъ?

рѣш.) Радіусъ $R_1=\frac{1}{6} d. \sqrt{3}=28,87$ фута.

Радіусъ $R_2=\frac{1}{6} d. \sqrt{2.3}=40,82$ фута.

20) Изъ центра даннаго круга, радіусомъ равнымъ половинѣ радіуса даннаго, описанъ кругъ. На какія части f_1 и f_2 раздѣлится

чрезъ это данная площадь круга $k=100$ □ саж?

рѣш.) Часть $f_1=\frac{k}{4}=25$ □ саж.

Часть $f_2=\frac{3k}{4}=75$ □ саж.

21) Какъ великъ d діаметръ круга, коего вырѣзокъ A, имѣющій 88 □ фут. заключается дугою, равною по длинѣ сказанному діаметру?

рѣш.) Діаметръ $d=2\sqrt{A}=18,76$ фут.

22) По окружности $c=436$ фут. отыскать площадь вырѣзка A, коего дуга равняется осьмой части окружности.

рѣш.) Площадь вырѣзка $A=\frac{c^2}{32\pi}=1890,97$ □ фут.

23) По площади круговаго кольца (кроны) $F=12087,26$ □ фут. найти радіусъ (r) меньшаго круга, когда извѣстно, что радіусъ бо́льшей окружности равняется длинѣ меньшей окружности.

рѣш.) Радіусъ меньшей окружности $r=\sqrt{\frac{F}{(2\pi+1)(2\pi-1)\pi}}=$ 10 фут.

24) Какъ велика площадь s круговаго отрѣзка, коего дуга содержитъ $n=50$ градусамъ и коего высота или стрѣлка $h=3\frac{1}{2}$ саж. и составляющая, какъ извѣстно, третью часть діаметра?

рѣш.) Площадь $s=\frac{h^2}{2}\left(\frac{n\pi}{80}-\sqrt{2}\right)=0,275h^2=3,05$ □ саж.

Что особеннаго въ этой задачѣ?

d) Задачи на пропорціональность площадей.

1) Два треугольника подобны, большій изъ нихъ имѣетъ 34 фута въ основаніи и 102 □ фута въ площади. Какъ велика площадь меньшаго треугольника, имѣющаго въ основаніи $3\frac{1}{5}$ фута?

рѣш.) Площадь меньшаго треугольника $=0,9035$ □ фут.

2) Какую площадь имѣетъ треугольникъ при 80 футахъ высоты, если подобный ему треугольникъ при 60 футахъ высоты заключаетъ въ площади 300 □ футовъ?

рѣш.) Площадь большаго треугольника $=533\frac{1}{3}$ □ фут.

3) Периметры двухъ подобныхъ треугольниковъ находятся въ отношенiи чиселъ 5 и 12. Какую площадь имѣетъ меньшiй треугольникъ, если большой содержитъ 60 □ саженъ?

Отв.) Площадь меньшаго треугольника $= 10\frac{5}{12}$ □ саж.

4) Какую площадь имѣетъ треугольникъ, подобный другому большему, площадь коего содержитъ 57 □ саж; если извѣстно, что высоты обоихъ треугольниковъ относятся какъ 7 къ 15?

Отв.) Площадь меньшаго $= 12\frac{31}{75}$ □ саж.

5) Изъ двухъ подобныхъ треугольниковъ одинъ менѣе другаго на 280 □ сажень; какую площадь имѣетъ каждый, если изъ двухъ соотвѣтственныхъ сторонъ ихъ одна въ $1\frac{1}{2}$ раза болѣе другой?

Отв.) Площадь большаго треугольника $= 504$ □ саж.,

а меньшаго $= 224$ □ саж.

6) Основанiе одного изъ двухъ подобныхъ треугольниковъ на 42 метра длиннѣе основанiя другаго. Какъ велико каждое изъ основанiй, когда извѣстно, что одинъ изъ тр-овъ содержитъ 810, а другой 640 □ метровъ?

Отв.) Большее основанiе $= 378$, а меньшее $= 336$ метрамъ.

7) Равнобедренный треугольникъ раздѣленъ прямою, параллельною основанiю, на двѣ части, изъ коихъ одна содержитъ $7\frac{1}{2}$, а другая $2992\frac{1}{2}$ □ саж.; чрезъ это каждый изъ равныхъ боковъ раздѣлился на двѣ неравныя части, изъ коихъ меньшая содержитъ 20 саж. Требуется отыскать большую часть.

Отв.) Большая часть $= 380$ саж.

8) Площади двухъ подобныхъ параллелограмовъ относятся какъ 4 къ 9; какъ широкъ меньшiй параллелограмъ, если ширина большаго равняется 1530 футамъ?

Отв.) Ширина меньшаго параллелограма $= 1020$ фут.

9) Въ нѣкоторый четыреугольникъ вписанъ другой ему подобный. Какъ велика площадь перваго, ежели периметръ его содержитъ 480, а меньшаго 20 метровъ, и когда извѣстно, что площадь послѣдняго составляетъ 76 □ метровъ?

Отв.) Площадь цѣлаго четыреугольника $= 43776$ □ метр.

10) Вычисляя планъ по тысячному масштабу найдены двѣ десятины; вычисляя тотъ же самый планъ по другому масштабу по-

лучены 50 десятинъ. По какому масштабу производилось второе вычисленіе?

Рѣш.) По 5000—ному масштабу.

11) Периметры двухъ подобныхъ фигуръ относятся какъ 3 къ 4; какъ велика площадь меньшей фигуры, когда извѣстно, что площадь большей содержитъ 176 □ метровъ?

Рѣш.) Площадь меньшей фигуры = 99 □ метрамъ.

12) Радіусы двухъ круговъ находятся въ отношеніи чиселъ 7 и 2-хъ. Какъ велика площадь большаго круга, если площадь меньшаго = 18 □ аршинамъ?

Рѣш.) Площадь большаго круга $= 220\frac{1}{2}$ □ арш.

13) Площади двухъ круговъ относятся между собою какъ $2\frac{1}{2}$ къ $3\frac{3}{4}$. Какой поперечникъ имѣетъ меньшій кругъ, если поперечникъ большаго содержитъ 15 миль?

Рѣш.) Діаметръ меньшаго круга=12,25 мили.

14) Какъ велики радіусы двухъ круговъ, если площади послѣднихъ относятся какъ 6 къ 0,4 и когда извѣстно, что одинъ изъ радіусовъ 4-мя футами болѣе другаго?

Рѣш.) Меньшій радіусъ=1,39; а большій=5,39 фут.

15) Площади двухъ круговъ относятся между собою какъ 3 къ 14. Какъ будутъ относиться ихъ окружности и какъ велика меньшая изъ нихъ, если большая содержитъ 252 саж.?

Рѣш.) Отношеніе окружностей=100: 216, а меньшая окружность=116,67 сажени.

16) Какъ великъ большій изъ двухъ подобныхъ секторовъ, если меньшій изъ нихъ содержитъ 80 □ футовъ, и радіусы соотвѣтствующихъ круговъ относятся какъ 3 къ 2?

Рѣш.) Площадь большаго сектора=180 □ футамъ.

17) Площади двухъ подобныхъ секторовъ относятся какъ $1\frac{2}{3}$ къ $7\frac{1}{2}$ и отрѣзокъ большаго радіуса, содержащійся между концентрическими дугами=6 метрамъ. Какъ велики діаметры соотвѣтствующихъ круговъ?

Рѣш.) Меньшій діаметръ=10,7; а большій 22,7 метра.

18) Изъ двухъ подобныхъ секторовъ площадь одного 10-ю □ сажен. болѣе другаго; какъ велика площадь каждаго, если окруж-

ности соотвѣтственныхъ круговъ относятся какъ числа 15 и 32?

рѣш.) Площадь меньшаго сектора $=2,816$;
а большаго $=12,816$ □ саж.

19) Изъ двухъ окружностей концентрическихъ круговъ одна на 40 футовъ длиннѣе другой; какъ велика каждая изъ нихъ, когда подобные секторы соотвѣтственныхъ круговъ относятся какъ 0,4 къ $2\frac{1}{8}$?

рѣш.) Меньшая окружность $=30,65$; а бо́льшая $=70,65$ фута.

20) Изъ двухъ секторовъ, того же круга, дуга одного 3-мя саженями длиннѣе дуги другаго. Какъ длинна каждая изъ этихъ дугъ, если площади обоихъ секторовъ относятся какъ 21 къ 5?

рѣш.) Меньшая дуга $=\frac{15}{16}$, а бо́льшая $3\frac{15}{16}$ сажени.

21) Одинъ ихъ двухъ секторовъ, одного и того же круга, имѣетъ дугою $142^\circ 40'$, а другой $72^\circ 25'$. Какъ велика площадь каждаго сектора, если одинъ 20 □ метрами болѣе другаго?

рѣш.) Площадь меньшаго сектора $=20,62$ □ метра,
а бо́льшаго. . . . $=40,62$ □ метра.

22) Изъ двухъ секторовъ однаго и того же круга, одинъ имѣетъ дугою $\frac{1}{18}$ часть, а другой $\frac{1}{32}$ часть цѣлой окружности. Какъ велика площадь каждаго вырѣзка, если одна болѣе другой 3-мя саженями?

рѣш.) Площадь меньшаго сектора $=3\frac{6}{7}$,
а большаго. . . . . $=6\frac{6}{7}$ □ сажени.

23) Сторона правильнаго треугольника въ $1\frac{1}{2}$ раза менѣе стороны другаго ему подобнаго. Во сколько разъ площадь послѣдняго будетъ болѣе площади перваго?

рѣш.) Площадь меньшаго треугольника въ $2\frac{1}{4}$ раза менѣе площади треугольника бо́льшаго.

24) Изъ правильнаго треугольника можно сдѣлать 64, равныхъ и правильныхъ, треугольника. Во сколько разъ сторона однаго изъ этихъ треугольниковъ будетъ менѣе стороны треугольника даннаго?

рѣш.) Въ 8 разъ.

25) Правильный треугольникъ содержитъ $\frac{2}{3}$ другаго правильнаго треугольника. На что слѣдуетъ умножить сторону меньшаго треугольника, чтобы въ произведеніи получить сторону треугольника бо́льшаго?

рѣш.) Множитель для стороны меньшаго треугольника $=\frac{1}{2}\sqrt{6}$ или 1,2247.

26) Многоугольникъ содержитъ въ себѣ квадратныхъ метровъ въ 16 разъ болѣе другаго, подобнаго ему. Какъ великъ периметръ бóльшаго многоугольника, если периметръ меньшаго содержитъ 7 метровъ?

рѣш.) Периметръ бóльшаго многоугольника=28 метрамъ.

27) Изъ двухъ одноименныхъ правильныхъ многоугольниковъ одинъ втрое болѣе другаго. Во сколько разъ превосходитъ сторона бóльшаго многоугольника сторону меньшаго?

рѣш.) Сторона бóльшаго многоугольника въ $\sqrt{3}$ или въ 1,732 болѣе стороны меньшаго.

28) Въ двухъ неравныхъ кругахъ вписаны правильные одноименные многоугольники; площадь одного изъ нихъ составляетъ только половину другаго. Во сколько разъ діаметръ меньшаго круга менѣе діаметра круга большаго?

рѣш.) Діаметръ меньшаго круга въ $\sqrt{2}$ или въ 1,4142 раза менѣе діаметра круга бóльшаго.

29) Въ какомъ содержаніи состоятъ діаметры трехъ различныхъ круговъ, если ихъ площади относятся какъ первыя три четныя числа ряда чиселъ натуральныхъ?

рѣш.) Три діаметра относятся между собою какъ $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

30) Въ какомъ содержаніи находятся площади трехъ круговъ, коихъ радіусы относятся какъ первыя три нечетныя числа ряда чиселъ натуральныхъ?

рѣш.) Три площади круговъ относятся какъ 1:9:25.

31) Въ какомъ отношеніи находятся окружности трехъ круговъ, которыхъ площади содержатся какъ 1 : 8 : 16?

рѣш.) Окружности относятся какъ $1:\sqrt{8}:\sqrt{16}$.

Отдѣлъ третій.

Задачи на Стереометрію.

a) Задачи на призмы и цилиндры.

1) Прямоугольнаго параллелепипеда извѣстны три ребра: $a=4$ саж., $b=8$ саж., $c=6$ саж. Требуется найти всю поверхность его и объемъ.

рѣш.) Вся поверхность $=208$ □ саж.

Объемъ $=192$ куб. саж.

2) Цѣлая поверхность прямоугольнаго параллелепипеда $=832$ саж.; два ребра его a и b также извѣстны: первое изъ нихъ $=16$ саж., а второе меньше перваго вдвое. Отыскать высоту и объемъ параллелепипеда.

рѣш.) Высота $=12$ саж.

Объемъ $=1536$ куб. саж.

3) Прямоугольнаго параллелепипеда боковая поверхность $=144$ саж., высота его $=3$ саж., отношеніе остальныхъ двухъ перпендикулярныхъ реберъ a и b равняется отношенію чиселъ 1 и 2. Найти a и b.

рѣш.) $a=8$ саж.

$b=16$ саж.

4) Отыскать одну изъ граней куба, равномѣрнаго прямоугольному параллелепипеду, коего перпендикулярныя ребра суть: 60, 30 и 15 метровъ.

рѣш.) Грань куба $=900$ □ метрамъ.

5) Найти діагональ D прямоугольнаго параллелепипеда, коего ребра суть a,b и c.

рѣш.) $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

6) По данному объему v прямоугольнаго параллелепипеда, и зная,

что перпендикулярные ребра его относятся какъ числа m, n и p, отыскать эти ребра.

$$\left.\begin{array}{l}\text{рѣш.) Первое ребро} = \frac{m}{a}\sqrt[3]{v} \\ \text{Второе} \ldots = \frac{n}{a}\sqrt[3]{v} \\ \text{Третье} \ldots = \frac{p}{a}\sqrt[3]{v}\end{array}\right\} \text{ гдѣ } a = \sqrt[3]{mnp}.$$

7) Ребро куба $=3$ фут. Требуется найти его поверхность, объемъ и діагональ.

рѣш.) Поверхность $= 54$ □ фут.

Объемъ $= 27$ куб. фут.

Діагональ $= 5,19$ фут.

8) Прямой триугольной призмы стороны основанія суть: $a = 5$ фут., $b=6$ фут., $c=3$ фут.; требуется найти ея полную поверхность и объемъ, когда извѣстно, что высота ея $h=8$ футамъ.

рѣш.) Полная поверхность $= 127$ □ фут.

Объемъ $= 60$ куб. фут.

9) Прямой триугольной призмы, коей основаніе есть равносторонній триугольникъ, извѣстны: цѣлая поверхность $= 100$ □ фут. и сторона основанія $= 6$ фут. Требуется найти объемъ.

рѣш.) Объемъ призмы $=59,5929$ куб. фута.

10) Прямой триугольной призмы, коей основаніе есть равносторонній триугольникъ, извѣстны: объемъ$=480$ куб. фут и высота$=16$ фут. Сыскать боковую поверхность.

рѣш.) Боковая певерхность $= 399,52$ □ фут.

11) Прямой пятиугольной призмы, коей основаніе есть правильный пятиугольникъ, извѣстны: сторона основанія $= 6$ дюймамъ и высота $=10$ саж. Найти цѣлую поверхность и объемъ.

рѣш.) Цѣлая воверхность $= 3$ □ саж. $+ 28$ □ фут.$+123,9$ □ дюйм.

Объемъ $= 30$ куб. фут. $+ 198$ куб. дюйм.

12) Въ прямомъ цилиндрѣ извѣстны: діаметръ основанія$=6$ фут. и высота $=8$ фут. Найти полную поверхность и объемъ его.

рѣш.) Цѣлая поверхность $= 207,34$ □ фут.

Объемъ $= 226,19$ куб. фут.

13) Прямаго цилиндра извѣстны: объемъ $=300$ куб. фут. и высота $=12$ фут. Найти діаметръ основанія.

рѣш.) Діаметръ основанія $= 5,64$ фут.

14) Какъ длинно должно быть ребро куба, равномѣрнаго по объему съ прямымъ цилиндромъ, заключающимъ въ діаметрѣ основанія $123\frac{1}{8}$ дюйма, а въ высотѣ $97\frac{3}{4}$ дюйма?

рѣш.) Ребро куба $= 91,615$ дюйм.

15) Требуется найти окружность основанія прямаго цилиндра, имѣющаго $d=5$ декаметрамъ длины, и коего объемъ былъ бы равенъ объему куба, содержащаго въ ребрѣ (a) 64 сентиметра.

рѣш.) Окружность основанія $=2a\sqrt{\frac{a\pi}{d}}=25,66$ сентиметра.

16) Какъ велики будутъ діаметры основаній 4-хъ прямыхъ цилиндровъ, ежели высота каждаго равняется одной сажени, а отношеніе ихъ объемовъ $= 1:2:3:4$; когда извѣстно сверхъ того, что всѣ они вмѣстѣ должны заключать 10 куб. сажень.

рѣш.) Діаметръ перваго цилиндра $=2\left(\sqrt{\frac{1}{\pi}}.\sqrt{1}\right)=1,128$ саж.

. . . втораго . . . $=2\left(\sqrt{\frac{1}{\pi}}.\sqrt{2}\right)=1,596$ саж.

. . . третьяго . . $=2\left(\sqrt{\frac{1}{\pi}}.\sqrt{3}\right)=1,954$ саж.

. . . четвертаго . . $=2\left(\sqrt{\frac{1}{\pi}}.\sqrt{4}\right)=2,257$ саж.

17) Въ квадратѣ извѣстна діагональ $= a$; найти его сторону и площадь; далѣе-отыскать кубъ, коего поверхность равнялась бы площади квадрата; вычислить объемъ этого куба и въ заключеніе найти площадь основанія цилиндра, равномѣрнаго съ найденнымъ кубомъ, имѣющимъ съ нимъ туже высоту.

рѣш.) Сторона квадрата $=\frac{a}{\sqrt{2}}$

Площадь квадрата $=\frac{a^2}{2}$

Ребро куба $= \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Объемъ куба $= \frac{a^3}{24\sqrt{3}}$

Площадь основанія цилиндра $= \frac{a^2}{12}$

18) Въ равностороннемъ треугольникѣ дана сторона a; найти его площадь и высоту, далѣе, отыскать основаніе цилиндра, коего боковая поверхность равнялась бы найденной площади треугольника, а высота высотѣ этого треугольника. Вычислить объемъ этого цилиндра и, обративъ его въ кубъ, найти полную поверхность сказаннаго куба.

РѢШ.) Площадь . . . . . $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Высота . . . . . $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Основаніе цилиндра . . . $= \frac{a^2}{16\pi}$

Объемъ цилиндра . . . $= \frac{a^3\sqrt{3}}{32\pi}$

Ребро куба . . . . . $= \frac{a\sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{32\pi}}$

Полная поверхность куба $= \frac{6a^2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{(32\pi)^2}}$

19) Въ прямоугольникѣ извѣстны отношенія: Геометрическое и Ариѳметическое между основаніемъ и высотою, первое изъ нихъ $= m$, а второе $= n$. Требуется найти: 1) Стороны, діагональ и площадь прямоугольника; 2) Радіусъ основанія цилиндра, коего боковая поверхность и высота равнялись бы, соотвѣтственно, найденнымъ площади и высотѣ прямоугольника. Далѣе: 3) Обратить этотъ цилиндръ въ кубъ и найти діагональ сего послѣдняго.

РѢШ.) Высота прямоугольника $= \frac{n}{m-1}$

Основаніе . . . . . . $=\dfrac{nm}{m-1}$

Діагональ прямоугольника $=\dfrac{n\sqrt{1+m^2}}{m-1}$

Площадь . . . . $=\dfrac{mn^2}{(m-1)^2}$

Радіусъ основанія цилиндра $=\dfrac{mn}{2\pi(m-1)}$

Объемъ цилиндра . . . $=\dfrac{m^2n^3}{4\pi(m-1)^3}$

Ребро куба равномѣрнаго

цилиндру . . . . . . $=\dfrac{n}{m-1}\sqrt[3]{\dfrac{m^2}{4\pi}}$

Діагональ куба . . . $=\dfrac{n}{m-1}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{m^2}{4\pi}}\cdot\sqrt{3}$

20) Въ прямомъ цилиндрѣ съ круговымъ основаніемъ, усѣченнымъ плоскостію не параллельно основанію, извѣстны: окружность основанія C, большая высота H и отношеніе m этой высоты къ высотѣ меньшей. Найти меньшую высоту и боковую поверхность цилиндра; далѣе: отыскать объемъ сказаннаго усѣченнаго тѣла, и обративъ его въ кубъ, отыскать сторону квадрата, равномѣрнаго площадью цѣлой поверхности куба.

рѣш.) Меньшая высота $=\dfrac{H}{m}$

Боковая поверхность

цилиндра . . . . . $=\dfrac{CH(m+1)}{2m}$

Объемъ цилиндра $=\dfrac{C^2H(m+1)}{8\pi m}$

Ребро куба . . . . $=\sqrt[3]{\dfrac{C^2H(m+1)}{8\pi m}}$

Грань куба . . . . $= \sqrt[3]{\dfrac{C^4H^2(m+1)^2}{64\pi^2m^2}}$

Вся поверхность куба $= 6\sqrt[3]{\dfrac{C^4H^2(m+1)^2}{64\pi^2m^2}}$

Сторона квадрата равномѣрнаго цѣлой поверхности

куба . . . . $= \sqrt{6}\sqrt[3]{\dfrac{C^2H(m+1)}{8\pi m}}$

b) Задачи на пирамиды и конусы.

1) Ребро Тетраедра = 6,4 линіи. Чему равняется цѣлая его поверхность?

рѣш.) Цѣлая поверхность = 70,9448 □ линій.

2) Цѣлая поверхность тетраедра заключаетъ 8,87 □ дюймовъ. Спрашивается: какъ велико его ребро?

рѣш.) Длина ребра = 2,263 дюйма.

3) Правильной, четыреугольной пирамиды извѣстны: сторона основанія = 12 саж., одно изъ реберъ боковыхъ граней = 24 саж. Требуется найти всю поверхность и объемъ пирамиды.

рѣш.) Вся поверхность = 701,76 □ саж.

Объемъ = 1077,6 куб. саж.

4) Четыреугольной пирамиды, коей основаніе есть прямоугольникъ и высота падаетъ въ точку пересѣченія его діагоналей, извѣстны: стороны основанія: 6 саж. и 18 саж.; найти боковую поверхность и объемъ, когда извѣстно, что ребро боковой грани = 36 саж.

рѣш.) Боковая поверхность = 842,67 □ саж.

Объемъ. . . = 1250,16 куб. саж.

5) Отрѣзка правильной триграной пирамиды, содержимаго между основаніемъ и плоскостію ему параллельною, извѣстны: одна сторона нижняго основанія = 8 саж. и одна сторона верхняго основанія = 4 саж. Требуется найти поверхность и объемъ отрѣзка, когда извѣстно, что часть ребра пирамиды, заключенная между параллельными плоскостями, = 12 саж.

рѣш.) Вся поверхность отрѣзка = 247,54 □ саж.

Объемъ отрѣзка = 190,36 куб. саж.

6) Отрѣзокъ триграной пирамиды, заключающійся между двумя параллельными плоскостями, имѣетъ высотою 2,55 метра; стороны нижняго основанія суть: 0,76; 0,48 и 0,34 метра, а стороны верхняго пусть будутъ: 0,38; 0,24 и 0,17 метра; требуется опредѣлить объемъ отрѣзка.

рѣш.) Объемъ отрѣзка = 0,0855 куб. метра.

7) Разсѣкая отрѣзокъ пирамиды, предыдущей задачи, плоскостію параллельно основанію, найдены стороны сѣченія, кои суть: 0,57; 0,36 и 0,255 метра. Требуется узнать: на какомъ разстояніи новая плоскость проведена отъ нижняго основанія, и какъ относятся объемы происшедшихъ новыхъ отрѣзковъ?

рѣш.) Новая плоскость проходитъ въ срединѣ между обѣими основаніями, и объемы двухъ отрѣзковъ, раздѣляемыхъ новою плоскостію, относятся между собою (приблизительно) какъ 37:19.

8) Въ нѣкоторой пирамидѣ, усѣченной плоскостію параллельно основанію, извѣстны основанія: нижнее $= B$, верхнее $= b$. Найти объемъ всей пирамиды и также отсѣченной, когда извѣстно, что высота отрѣзка, содержащагося между пар-ными плоскостями, $= H$.

рѣш.) Объемъ всей пирамиды . . . $= \frac{1}{3} BH \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$

Объемъ отсѣченной пирамиды $= \frac{1}{3} b H \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$

9) Въ прямомъ конусѣ извѣстны: діаметръ основанія = 6 фут. и образующая = 14 фут. Найти полную поверхность и объемъ конуса.

рѣш.) Полная поверхность = 160,22 □ фут.

Объемъ конуса. . = 128,88 куб. фут.

10) Цѣлая поверхность прямаго конуса = 639,2 □ фут., діаметръ основанія = 12 фут. Найти образующую конуса.

рѣш.) Образующая = 27,91 фут.

11) Прямаго конуса извѣстенъ объемъ = 1030,72 куб. фут., діаметръ основанія = 12 фут. Сыскать образующую.

рѣш.) Образующая = 27,99 фут.

12) Отрѣзка прямаго конуса, содержимаго между основаніемъ и плоскостію ему параллельною, извѣстны: діаметръ нижняго основа-

нія = 10 фут., діаметръ верхняго основанія 6 фут. и часть образующей, лежащая между параллельными плоскостями = 12 фут. Требуется найти всю поверхность и объемъ отрѣзка.

рѣш.) Вся поверхность = 408,407 □ фут.

Объемъ отрѣзка = 607,14 куб. фут.

13) Въ прямомъ конусѣ, усѣченномъ плоскостію параллельно основанію, извѣстны: высота всего конуса =15 метрамъ, радіусъ нижняго основанія = 6 метрамъ и высота конуса отсѣченнаго = 4 метрамъ. Найти боковую поверхность усѣченнаго конуса и его объемъ.

рѣш.) Боковая поверхность =282,87 □ метр.

Объемъ =554,76 куб. метр.

14) Требуется сдѣлать два прямые конуса одинаковой высоты, равной 7 дюймамъ, такъ, чтобы площади ихъ основаній относились какъ 3 къ 13. Какъ велики будутъ діаметры основаній сихъ конусовъ, когда извѣстно, что объемы ихъ вмѣстѣ составляютъ 7 куб. дюймовъ?

рѣш.) Діаметръ основанія 1-го конуса $=2\left(\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\sqrt{3}\right)=$ 0,8463 дюйм.

. . . . . . 2-го . . $=2\left(\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\sqrt{13}\right)=$ 1,7617 дюйм.

15) Требуется сдѣлать три конуса, имѣющихъ одно и тоже основаніе, равное 0,84 □ метра, и которые всѣ вмѣстѣ составляютъ 3 куб. метра. Найти высоты сихъ конусовъ, когда извѣстно, что сіи послѣднія относятся какъ числа $\frac{1}{2}:\frac{3}{4}:\frac{5}{9}$.

рѣш.) Высота 1-го конуса $=\frac{1}{2}(5,9341)=2,9671$ метра.

. . . . 2-го . . . . $=\frac{3}{4}(5,9341)=4,4506$ метра.

. . . . 3-го . . . . $=\frac{5}{9}(5,9341)=3,2967$ метра.

16) Конусъ усѣченъ плоскостію параллельно основанію; основаніе нижнее относится къ верхнему какъ a къ b. Требуется найти радіусы r и ϱ сихъ основаній, когда извѣстны: высота h и объемъ k, происшедшаго отрѣзка.

рѣш.) Радіусъ нижняго основанія $r=\sqrt{\frac{3ak}{(a+b+\sqrt{ab})\pi h}}$

Радіусъ верхняго основанія $\varrho = \sqrt{\frac{3bk}{(a+b+\sqrt{ab})\pi h}}$

17) Полная поверхность конуса $=A$, площадь круга сѣченія этого конуса плоскостію параллельною основанію $=f$; найти радіусъ r нижняго основанія и высоту h всего конуса, когда извѣстно, что параллельное сѣченіе отъ вершины конуса сдѣлано на разстояніи равномъ a.

рѣш.) Радіусъ основанія $r = \sqrt{\frac{A}{\pi\left(1+\sqrt{\frac{a^2\pi+f}{f}}\right)}}$

Высота $h = \sqrt{\frac{A}{f\left(1+\sqrt{\frac{a^2\pi+f}{f}}\right)}}$

18) Въ треугольникѣ даны три стороны a, b и c; найти его площадь и высоту (P и h); далѣе, отыскать той же высоты конусъ, коего поверхность равнялась бы вычисленной площади треугольника; вычислить объемъ этого конуса и опредѣлить ребро равновеликаго съ нимъ куба.

рѣш.) Полагая: $a+b+c=2p$, имѣемъ:

Площадь . . . $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Высота . . . $h=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$

Образующая конуса $y=\sqrt{\frac{h^2}{2}+\frac{\sqrt{h^4\pi^2+4P^2}}{2\pi}}$

Радіусъ основанія $R=\frac{P}{\pi y}$

Объемъ конуса $k=\pi R^2\frac{h}{3}$

Ребро куба . . $=\sqrt[3]{\pi R^2\frac{h}{3}}$

19) Въ квадратѣ извѣстна діагональ a; найти площадь около него

описаннаго круга; отыскать далѣе, конусъ, коего образующая равнялась бы данной діагонали квадрата, а боковая поверхность площади найденнаго круга; вычислить объемъ сказаннаго конуса и опредѣлить отношеніе объема цилиндра, имѣющаго основаніе и высоту вычисленнаго конуса, къ объему тогоже конуса.

рѣш.) Площадь описаннаго круга .... $=\frac{\pi a^2}{4}$

Радіусъ круга основанія конуса .... $=\frac{a}{4}$

Объемъ конуса .... $=\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{192}$

Отношеніе объемовъ конуса и цилиндра $=\frac{1}{3}$

c) Задачи на вычисленіе шаровъ и частей ихъ.

1) Шаръ, коего радіусъ $=15$ дециметрамъ, усѣкается плоскостію, образующею кругъ, коего радіусъ $=12$ дециметрамъ; на какомъ разстояніи отъ центра проведена плоскость сѣченія?

рѣш.) На разстояніи 9 дециметровъ.

2) Діаметръ шара $=$ 608 линіямъ. Опредѣлить его поверхность.

рѣш.) Поверхность $=$ 1161334 □ линій.

3) Поверхность шара $=$ 1809,52 □ фут. Найти діаметръ.

рѣш.) Діаметръ $=$ 23,99 фут.

4) Объемъ шара $=$ 60843 куб. линій. Опредѣлить діаметръ.

рѣш.) Діаметръ $=$ 46,602 линій.

5) Діаметръ даннаго шара $=$ 8 дюймамъ. Сыскать діаметръ другаго шара, коего объемъ составляетъ $\frac{2}{3}$ объема даннаго.

рѣш.) Діаметръ другаго шара $=$ 6,99 дюйма.

6) Объемъ шара $=$ 1546 дюймамъ. Найти объемъ другаго шара, коего діаметръ относится къ діаметру перваго шара, какъ 3 : 5.

рѣш.) Объемъ втораго шара $=$ 333,9 куб. дюйма.

7) Объемъ шара равенъ объему прямаго конуса, коего высота $=1$ метру, а діаметръ основанія $=7$ дециметрамъ. Сколько будетъ заключать діаметръ шара?

рѣш.) Діаметръ шара = 6 дециметрамъ + 2 сантиметрамъ + 5,73 миллиметра.

8) Шаръ, имѣющій въ діаметрѣ 4 дюйма, требуется замѣнить конусомъ, коего высота равнялась бы $7\frac{1}{4}$ дюйма. Спрашивается: какъ великъ будетъ радіусъ основанія этого конуса?

рѣш.) Радіусъ основанія конуса = 2,1009 дюйма.

9) Какъ велика будетъ высота прямаго конуса, коего діаметръ основанія = 767 линіямъ, а объемъ равенъ объему шара, имѣющаго 300 линій въ діаметрѣ?

рѣш.) Высота конуса = 91,79 линіи.

10) Какъ великъ будетъ радіусъ шара, равномѣрнаго прямому цилиндру, имѣющему 4,08 дюйма въ діаметрѣ основанія и 9,087 дюйма въ высотѣ?

рѣш.) Радіусъ шара = 3,0496 дюйма.

11) Какъ великъ долженъ быть діаметръ основанія прямаго цилиндра, имѣющаго высотою 1,098 фута, когда извѣстно, что онъ равномѣренъ съ шаромъ, коего діаметръ = 9,9 фута?

рѣш.) Діаметръ основанія = 24,27 фута.

12) Шаръ и прямой цилиндръ по объему равномѣрны. Діаметръ шара = 0,03 дюйма; найти высоту цилиндра, когда извѣстно, что діаметръ основанія цилиндра = 0,071 дюйма.

рѣш.) Высота = 0,00357 дюйма.

13) Кубъ, заключающій въ себѣ 684,3783 куб. фута, требуется обратить въ шаръ. Какъ великъ будетъ радіусъ этого шара?

рѣш.) Радіусъ шара = 5,4668 фута.

14) Шаръ, вмѣщающій въ себѣ 100,009 куб. метра, требуется обратить въ кубъ; какъ велико будетъ ребро куба?

рѣш.) Ребро куба = 4,64 метра.

15) Требуется сдѣлать три шара, которые бы относились между собою какъ 2:5:11; какъ велики радіусы этихъ шаровъ, когда извѣстно, что всѣ они вмѣстѣ составляютъ 30 куб. милль?

рѣш.) Радіусъ перваго шара $= \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4\pi}}\sqrt[3]{2}\right) = 0{,}926$ милли.

. . . . втораго . . $= \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4\pi}}\sqrt[3]{5}\right) = 1{,}257$ милли.

. . . . . . Третьяго . . $=\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4\pi}}\sqrt[3]{11}\right)=$1,635 милли.

16) Сегментъ шара имѣетъ 68 линій въ діаметрѣ основанія и высотою 21 линію; требуется найти объемъ самаго сегмента, а равно и объемъ соотвѣтствующаго сектора.

рѣш.) Объемъ сектора = 63590 кубич. линій

. . . сегмента = 42982 кубич. линій.

17) Шаръ, имѣющій радіусомъ 34 дюйма, усѣкается двумя параллельными плоскостями; круги сѣченія, образующіе зону, соотвѣтствуютъ двумъ сегментамъ, изъ коихъ высота перваго = 17, а втораго 26 дюймамъ. Требуется опредѣлить объемъ сказанной зоны.

рѣш.) Объемъ = 28076,48 куб. дюйма.

18) Дуга большаго круга, соотвѣтствующая сегменту, $=90^{\circ}$, діаметръ основанія сегмента =4 футамъ. Требуется найти полную поверхность и объемъ сегмента.

рѣш.) Полная поверхность сегмента =27,30□ фут.

Объемъ сегмента =5,50 куб. фута.

19) Діаметръ шара = 8 футамъ; еще дается діаметръ малаго круга, заключающій въ себѣ 6 футовъ. Вычислить полную поверхность и объемъ зоны, содержащейся между большимъ и сказаннымъ малымъ кругомъ.

рѣш.) Полная поверхность зоны = 145,04□ фут.

Объемъ зоны = 113,60 куб. фут.

20) Радіусъ шара $=r$. Требуется опредѣлить высоту h его отрѣзка, при условіи: чтобы объемъ сказаннаго отрѣзка относился къ объему соотвѣтствующаго вырѣзка какъ $n:m$.

рѣш.) Высота $h=r\left[\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}-\frac{2n}{m}\right)}\right]$

Ежели $\frac{n}{m}=\frac{9}{8}$, то $h=\frac{3}{2}r$;

Ежели $\frac{n}{m}=\frac{5}{8}$, то $h=\frac{1}{2}r$

При всякомъ ли заданіи $\frac{n}{m}$ эта задача возможна?

21) Опредѣлить высоту сегмента, коего поверхность въ n разъ болѣе круга основанія.

рѣш.) Высота $h = \frac{n-1}{n} 2r$, гдѣ r есть радіусъ шара.

22) Опредѣлить отношеніе объема (k) шара, коего радіусъ $= r$, къ объему (J) сегмента того же шара, когда извѣстно, что поверхность сказаннаго сегмента въ n разъ болѣе площади круга, служащаго ему основаніемъ.

рѣш.) $\frac{J}{k} = \frac{(n-1)^2(n+2)}{n^3}$

23) Въ прямомъ конусѣ дана высота h и образующая a; найти поверхность этого конуса и его объемъ; далѣе: отыскать шаръ, коего поверхность равнялась бы площади круга основанія конуса; вычислить объемъ этого *шара и найти* отношеніе между его діаметромъ и діагональю описаннаго около него куба.

рѣш.) Поверхность конуса $= \pi a \sqrt{a^2 - h^2}$

Объемъ конуса $= \pi (a^2 - h^2) \frac{h}{3}$

Радіусъ шара $= \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{2}$

Объемъ шара $= \frac{\pi}{6} (\sqrt{a^2 - h^2})^3$

Отношеніе діаметра шара къ діагонали описаннаго около него куба $= 1 : \sqrt{3}$

24) Въ конусѣ, представляющемъ въ разрѣзѣ равносторонній треугольникъ, дана высота h; требуется найти образующую этого конуса, его поверхность и объемъ. Еще требуется отыскать объемъ и поверхность шара, коего діаметръ равенъ высотѣ конуса; тоже вычислить и для цилиндра, помѣщающагося въ сказанномъ шарѣ и представляющемъ квадратъ въ разрѣзѣ по діаметру шара; въ заключеніе, найти кубъ, вмѣщающій въ себѣ измѣренные выше: конусъ, шаръ и цилиндръ.

рѣш.) Образующая конуса $= \frac{2h}{\sqrt{3}}$

Поверхность . . . . $=\frac{2\pi h^2}{3}$

Объемъ . . . . . $=\frac{\pi h^3}{9}$

Поверхность шара $=\pi h^2$

Объемъ . . . . . . $=\frac{\pi h^3}{6}$

Поверхность цилиндра $=\frac{\pi h^2}{2}$

Объемъ . . . . $=\frac{\pi h^3}{8\sqrt{2}}$

Ребро куба, вмѣщающаго конусъ, шаръ и цилиндръ $=\frac{h}{2}\sqrt[3]{\frac{\pi(20\sqrt{2}+9)}{9\sqrt{2}}}$

25) Требуется сдѣлать прямой цилиндръ, котораго, какъ боковая поверхность, такъ и объемъ, равнялись бы поверхности и объему шара, имѣющаго діаметромъ a.

Рѣш.) Діаметръ основанія цилиндра $=\frac{2}{3}a$

Высота цилиндра $=\frac{3}{2}a$

26) Требуется сдѣлать прямой конусъ, котораго объемъ и цѣлая поверхность были бы равны объему и поверхности шара, имѣющаго діаметромъ a.

Рѣш.) Діаметръ основанія конуса $=a\sqrt{(1\mp\sqrt{-1})}$;

Высота конуса $=a(1\pm\sqrt{-1})$;

но въ сихъ выраженіяхъ находятся мнимые корни, слѣдовательно вопросъ невозможенъ.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Задачи тригонометрическія.

а) Задачи на рѣшеніе прямолинейныхъ треугольниковъ.

1) Въ прямоугольномъ треугольникѣ извѣстны: гипотенуза $=59,87$ и одинъ изъ острыхъ угловъ $37^{0}18'$; требуется найти остальныя части треугольника и также его площадь.

рѣш.) Другой острый уголъ $=52^{0}42'$; катеты суть: 36,28; 47,62; площадь $=863,93$ □ м.

2) Катетъ въ прямоугольномъ треугольникѣ $=274,243$; уголъ прилежащій этому катету $=43^{0}18'20''$; требуется найти остальныя части треугольника.

рѣш.) Другой острый уголъ $=46^{0}41'40''$; другой катетъ $=258,483$; гипотенуза $=376,859$.

3) Гипотенуза прямоугольнаго треугольника $=376,8$; одинъ изъ катетовъ $=324,36$; требуется найти остальныя части треугольника.

рѣш.) Другой катетъ $=191,75$; уголъ прилежащій данному катету $=30^{0}35'25''$; другой уголъ $=59^{0}24'35''$.

4) Катеты въ прямоугольномъ треугольникѣ суть: 159,3 и 378,95; требуется найти остальныя его части.

рѣш.) Гипотенуза $=411,07$; уголъ прилежащій меньшему катету $=67^{0}11'58'',1$; другой уголъ $=22^{0}48'1'',9$.

5) Въ косоугольномъ треугольникѣ даны двѣ стороны: 678 саж. и 429 саж., уголъ лежащій между ними $=53^{0}18'$; требуется отыскать остальныя части треугольника.

рѣш.) Третья сторона $=544,12$; а другіе углы: $87^{0}29'31''$ и $39^{0}12'29''$.

6) Въ косоугольномъ треугольникѣ дана сторона 35,78; углы

прилежащіе сказанной сторонѣ суть: $31^{0}37'46''$ и $108^{0}10'10''$; требуется отыскать другія двѣ стороны.

рѣш.) Искомыя стороны суть: 29,07 и 52,67.

7) Въ треугольникѣ даны всѣ три стороны: 360;378;400 саж.; требуется отыскать углы.

рѣш.) Искомые углы суть: $55^{0}2'18''$;$59^{0}22'26''$ и $65^{0}35'16''$.

8) Въ треугольникѣ даны двѣ стороны: 568,91 и 507,32; уголъ противолежащій бо́льшей сторонѣ$=63^{0}15'12''$; требуется отыскать остальныя части треугольника.

рѣш.) Третья сторона$=572,431$; уголъ противолежащій меньшей сторонѣ$=52^{0}46'51''$, а третій уголъ$=63^{0}57'57''$.

9) Въ треугольникѣ извѣстны двѣ стороны: 363 и 489,87 саж.; уголъ противолежащій меньшей сторонѣ $=38^{0}12'$; требуется найти уголъ противолежащій бо́льшей сторонѣ.

рѣш.) Искомый уголъ есть: или въ $56^{0}34'6''$ или въ $123^{0}25'54''$.

b) Задачи практической геометріи, разрѣшаемыя помощію плоской Тригонометріи.

1) Извѣстно разстояніе 103,75 фут. точки *C* (считаемое по горизонтальной плоскости) отъ нѣкотораго строенія *AB*, гдѣ *A* есть верхняя точка зданія; кромѣ того опредѣленъ инструментомъ въ 4 фута вышиною уголъ, образуемый линіями визированія, изъ коихъ одна направлена изъ точки *C* на точку *A*, а другая параллельно сказанной горизонтальной плоскости, этотъ уголъ$=27^{0}23'$. Опредѣлить высоту зданія

рѣш.) Высота зданія $AB=57,74$ фута.

2) Изъ вершины *C*, башни, коей высота $=87\frac{1}{3}$ фута, измѣренъ уголъ, образуемый линіями, изъ коихъ одна имѣетъ положеніе вертикальное, а другая направлена на предметъ *B*, лежащій за рѣкою, этотъ уголъ$=68^{0}43'$. Требуется опредѣлить разстояніе сказаннаго предмета отъ подошвы башни.

рѣш.) Искомое разстояніе$=224\frac{1}{5}$ фута.

3) На горѣ находится башня *AC*, коей высота $=75$ фут.; извѣстны

углы, образуемые стѣною башни и направленіями лучей зрѣнія, идущими отъ верхней ея точки и нижней на одинъ и тотъ же предметъ D, лежащій въ долинѣ; эти углы суть: $43^{0}40'$ и $127^{0}35'$. Требуется опредѣлить высоту горы, не сходя съ оной.

рѣш.) Высота горы $=207,62$ фута.

4) Высота зданія, стоящаго на горѣ, равняется 93,5 фут. Изъ даннаго мѣста D измѣрены два угла, образуемые линіею горизонтальною, лежащею въ одной плоскости съ высотою зданія, и направленіями, идущими на верхнюю точку зданія и на нижнюю; эти углы суть: $53^{0}56'$ и $47^{0}28'$. Требуется найти высоту горы.

рѣш.) Высота горы $=360,15$ фута.

5) Подошва нѣкотораго зданія и двѣ точки C и D расположены въ одной прямой линіи, лежащей въ горизонтальной плоскости, разстояніе сказанныхъ точекъ $=130$ фут.; при чемъ измѣрены углы, образуемые прямою, соединяющею точки C и D и направленіями на вершину зданія; эти углы суть: $119^{0}5'$ и $49^{0}50'$. Требуется опредѣлить высоту зданія.

рѣш.) Искомая высота $=451$ фут: $+7\frac{1}{3}$ дюйм.

6) Двѣ точки C и D, лежащія въ горизонтальной плоскости и коихъ взаимное разстояніе $=285,5$ фут., расположены въ одной плоскости съ ребромъ башни AB, построенной на горѣ; точка A есть верхній ея пунктъ, а B нижній; измѣрены углы, образуемые прямою, соединяющею сказанныя точки C и D и направленіями на A и на B; эти углы суть $ACD=38^{0}27'$, $ADC=135^{0}9'$ и $BDC=139^{0}51'$. Требуется опредѣлить высоту башни.

рѣш.) Искомая высота $=170,73$ фута.

7) Какъ велико разстояніе AB неприступнаго предмета A, лежащаго въ горизонтальной плоскости, отъ нѣкотораго предмета B, расположеннаго въ той же плоскости, когда первый изъ нихъ A видимъ какъ изъ B такъ и изъ третьей точки C, и сверхъ того чрезъ измѣреніе найдены: $BC=726$ саж., уголъ $ABC=39^{0}14'3''$, уголъ $ACB=127^{0}34'18''$? Также, какъ велико разстояніе AC?

рѣш.) $AB=2520,99$ саж.

$AC=2011,76$ саж.

8) На берегу моря находятся два предмета A и B, коихъ взаимное разстояніе измѣрено и равняется 35869 фут. Отъ этихъ предметовъ

усматриваются три башни D,E и F, лежащія на островѣ, расположенномъ не въ дальнемъ разстояніи отъ берега, и измѣрены, помощію теодолита, слѣдующіе углы:

$$BAD=68^0 17' 16''$$
$$BAE=41^0 21' 32''$$
$$BAF=19^0 43' 15''$$
$$ABD=50^0 16' 19''$$
$$ABE=108^0 40' 25''$$
$$ABF=122^0 31' 40''$$

требуется опредѣлить: 1) разстояніе сказанныхъ башенъ отъ A и отъ B; 2) разстояніе башенъ между собою, и наконецъ, 3) углы треугольника DEF, образуемые прямыми, соединяющими всѣ три башни.

рѣш.)

$$\left.\begin{aligned} AD&=31408,1\\ BD&=37940,9\\ AE&=68028,4\\ BE&=47449,2\\ AF&=49396,4\\ BF&=19769,4\\ DE&=42478,2\\ DF&=37056,0\\ EF&=28648,7 \end{aligned}\right\} \text{фута.}$$

уг. $DEF=59^0 2' 33'',0$
уг. $DFE=79^0 25' 45'',8$
уг. $EDF=41^0 31' 41'',2$

9) Въ одной и той же плоскости расположены три точки A,B,C по-сю сторону, а три башни D,E,F по ту сторону рѣки. Помощію измѣренія найдены:

Разстоянія: $\left.\begin{aligned} AB&=273\\ BC&=436 \end{aligned}\right\}$ саж.

Углы: $ABC=118^0 20'$
$BAD=59^0 15'$
$BAE=98^0 40'$
$BAF=126^0 50'$

$BCD = 87^{0}30'$

$BCE = 79^{0}20'$

$BCF = 51^{0}10'$

Требуется опредѣлить разстоянія: AC, AD, AE и AF; также углы: CBD, DBE, EBF и FBA, и въ заключеніе: стороны и углы треугольника, образуемаго прямыми, соединяющими всѣ три башни между собою.

рѣш.) $AC = 614,497$, $AD = 556,594$, $AE = 570,519$, $AF = 323,446$ сажени.

$DE = 380,325$, $DF = 526,413$, $EF = 323,652$ сажени.

уг. $CBD = 26^{0}56'46'',40$

уг. $DBE = 33^{0}51'44'',66$

уг. $EBF = 28^{0}31'4'',43$

уг. $FBA = 29^{0}0'24'',51$

уг. $EDF = 37^{0}39'20'',87$

уг. $FED = 96^{0}27'48'',73$

уг. $EFD = 45^{0}52'50'',40$

10) Въ плоскости, около точки M расположены, видимыя изъ нея, три дерева A, B и C; соотвѣтственныя разстоянія сихъ деревьевъ отъ сказанной точки M суть: 72846, 246956 и 163927 дюйм. Сверхъ того найдены:

уг. $BMC = 113^{0}16'27''$

уг. $AMC = 146^{0}24'51''$

уг. $AMB = 100^{0}18'42''$.

Требуется опредѣлить углы, образуемые соединяющими ихъ прямыми линіями.

рѣш.) уг. $BAC = 87^{0}41'30'',5$

уг. $ABC = 41^{0}11'42'',3$

уг. $ACB = 51^{0}6'47'',2$

11) Нѣкоторой площади $ABCD$, ограниченной четырьмя прямыми

линіями, извѣстны:

Стороны: $AB=4756$, $BC=2963$, $CD=3572$ фут.

Углы: $ABC=108^\circ 13' 54'$
$BCD=127^\circ 51' 20''$.

Требуется найти четвертую сторону AD, длину обѣихъ діагоналей и также углы, образуемые сими діагоналями.

рѣш.) Четвертая сторона $AD=6856,31$
длина одной діагонали $=6341,65$
. . . . . другой . . . . $=5876,10$ фута

Углы, образуемые діагоналями суть: $105^\circ 53' 36'',87$
и $74^\circ 6' 23'',14$.

12) Нѣкоторой площади $ABCDE$, ограниченной пятью прямыми линіями, извѣстны:

Стороны: $AB=374$, $BC=253$, $CD=361$, $DE=312$ метр.

уг. $BCD=123^\circ 14' 5''$.

Діагонали: $CA=426$, $CE=531$ метр.

Требуется найти пятую сторону AE и числовое значеніе площади.

рѣш.) $AE=251,507$ метра.

Числовое значеніе площади $=154390\square$ метровъ.

c) Задачи основанныя на Тригонометрическихъ преобразованіяхъ.

1) Даны: одинъ изъ острыхъ угловъ и площадь прямоугольнаго треугольника; сыскать всѣ его стороны. Пусть данный уголъ $=\alpha$, его площадь$=p$; опредѣляемые катеты: прилежащій данному углу—x, а противолежащій y.

рѣш.) $x=\sqrt{\frac{2p}{tg\alpha}}$; $y=\sqrt{2ptg\alpha}$; гипотенуза$=2\sqrt{\frac{p}{\sin 2\alpha}}$

2) Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC извѣстны равныя стороны $AC=CB=a$; между сими сторонами проведена линія CD, составляющая углы: $ACD=\alpha$ и $BCD=\beta$. Требуется найти линію CD.

рѣш.) $CD=\dfrac{a.\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$

3) Въ равнобедренномъ треугольникѣ ACB извѣстна линія CD, проведенная между равными сторонами, она $=a$, еще извѣстны углы α и β, образуемые сказанною линіею CD, съ равными сторонами AC и CB. Найти всѣ стороны треугольника.

рѣш.) $AC=CB=\dfrac{a.\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;

основаніе $AB=\dfrac{2a\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cot g\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$

4) Даны двѣ стороны a и b треугольника и линія c дѣлящая уголъ ϑ, между ними содержащійся, пополамъ; найти уголъ ϑ.

рѣш.) $\cos\frac{1}{2}\vartheta=\dfrac{c(a+b)}{2ab}$

5) Изъ вершины бóльшаго остраго угла C прямоугольнаго треугольника ACF, радіусомъ, равнымъ меньшему катету CF, описанъ кругъ пересѣкающій гипотенузу AC въ точкѣ E; даны: $AE=a$ и бóльшій катетъ $AF=b$; сыскать уголъ ϑ, противолежащій меньшему катету.

рѣш.) $tg\,\vartheta=\dfrac{b^2-a^2}{2ab}$

6) Изъ вершины O тупаго угла треугольника AOE, меньшею стороною OA описанъ кругъ, пересѣкающій прочія стороны въ точкахъ C и D; даны: $CE=a$, $DE=b$, $EA=c$. Найти уголъ ϑ, противолежащій меньшей сторонѣ OA.

рѣш.) $\cos\vartheta=\dfrac{b(a+c)}{ac+b^2}$

7) По даннымъ угламъ: A,B,C и периметру p треугольника, сыскать его стороны.

рѣш.) Означая стороны чрезъ AC,BC и AB имѣемъ:

$$AC=\frac{AB.\sin B}{\sin C};\ BC=\frac{AB.\sin A}{\sin C};\ \text{но}\ AB=\frac{p.\sin c}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

8) Въ треугольникѣ извѣстна высота h и всѣ три угла: A,B,C; найти его площадь и стороны x,y,z, изъ коихъ x принята за основаніе.

рѣш.) $y=\frac{h}{\sin C}$; $z=\frac{h}{\sin B}$; $x=h\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$

$$\text{Площадь}=\frac{hx}{2}=\frac{h^2\sin A}{2\sin B\sin C}$$

9) По данному основанію a треугольника ABC, высотѣ его b и углу при вершинѣ $ACB=\gamma$ найти отрѣзки AD и BD, происшедшіе отъ опущенія сказанной высоты; отсюда опредѣлить и остальныя стороны треугольника AC и BC.

рѣш.) Отрѣзокъ $AD=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2+ab\ ctg\ \gamma}$

$$BD=a-\left[\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2+ab\ ctg\ \gamma}\right]$$

Сторона $AC=\sqrt{b^2+AD^2}$

$BC=\sqrt{b^2+BD^2}$

10) Въ треугольникѣ ACB проведена линія, дѣлящая его на двѣ части: ACD и BCD; даны углы при вершинѣ C, именно: уголъ $ACD=\alpha$, уголъ $BCD=\beta$, извѣстна также сторона $BC=a$ и площадь треугольника $ACD=p$; найти AC и CD.

рѣш.) $AC=\frac{p}{a\sin(\alpha+\beta)}\pm\sqrt{\frac{p^2}{a^2\sin^2(\alpha+\beta)}+\frac{2p\sin\beta}{\sin\alpha.\sin(\alpha+\beta)}}$

Линія CD найдется изъ уравненія: $CD=\frac{2p}{AC\sin\alpha}$

11) Въ треугольникѣ ACB извѣстны: его площадь $=p$, сумма квадратовъ двухъ сторонъ его $AC^2+CB^2=q$ и уголъ между сими сторонами содержащійся, т. е., $ACB=\alpha$; требуется найти AC и BC.

рѣш.) $AC=\pm\sqrt{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{4p^2}{\sin^2\alpha}}}$

$$BC=\pm\sqrt{\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{4p^2}{\sin^2\alpha}}}$$

12) Въ треугольникѣ ABC даны: его площадь $=p$, сумма двухъ сторонъ его $AC+CB=a$ и уголъ между ними содержащійся $ACB=\alpha$. Найти всѣ стороны треугольника.

рѣш.) $AC=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{8p}{\sin\alpha}}$

$$CB=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\frac{8p}{\sin\alpha}}$$

$$AB=\sqrt{\left(a^2-\frac{4p}{\sin\alpha}-4p\cot g\alpha\right)}$$

d) Задачи на рѣшеніе сферическихъ треугольниковъ.

α) Треугольники прямоугольные.

1) Въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ даны оба катета: 50^0 и 40^0; отыскать остальныя части.

рѣш.) Гипотенуза $=60^0 30' 4'',7$

Уголъ противолежащій бо́льшему катету $=61^0 39' 33'',4$

. . . . меньшему катету $=47^0 36' 21'',3$

2) Въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ дана гипотенуза въ $60^0 18'$ и одинъ изъ катетовъ въ $50^0 2'$. Опредѣлить непрямые углы и другой катетъ:

рѣш.) Другой катетъ $=39^0 31' 34'',9$

Уголъ противолежащій меньшему катету $=47^0 6' 43'',1$

. . . . бо́льшему катету $=61^0 55' 28'',3$

3) Въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ катетъ $=87^0 14'$, непрямой уголъ ему прилежащій $=60^0$; требуется опредѣлить остальныя части треугольника.

рѣш.) Гипотенуза . . . . . $=88^0 36' 5' 7',1$

Другой катетъ . . . $=59^0 58' 15'',8$

Другой непрямой уг. $=87^0 36' 12'',3$

4) Въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ катетъ $=87^0 14'10''$, уголъ ему противолежащій $=16^0 16' 17''$; требуется сыскать остальныя части.

рѣш.) Задача невозможна.

5) Въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ гипотенуза $=108^0 14\frac{1}{2}'$ и одинъ изъ непрямыхъ угловъ $=48^0 48\frac{3}{4}'$. Отыскать остальныя части.

рѣш.) Катетъ противолежащій данному углу $=45^0 37' 18'',4$

Другой катетъ $=116^0 35' 16'',0$

Другой непрямой уголъ $=109^0 41' 0'',0$

6) По двумъ непрямымъ угламъ прямоугольнаго сферическаго треугольника: въ $69^0,08$ и $57^0,984$ опредѣлить прочія части.

рѣш.) Гипотенуза . . $=76^0 10' 18'',3$

Первый катетъ $=65^0 5' 41'',8$

Второй катетъ $=55^0 25' 8'',5$

7) Одинъ изъ непрямыхъ угловъ прямоугольнаго сферическаго треугольника въ $85\frac{1}{2}^0$, а другой въ $73\frac{3}{8}^0$; какъ велики будутъ остальныя части треугольника.

рѣш.) Гипотенуза . . $=88^0 39' 12'',5$

Первый катетъ $=85^0 18' 11'',7$

Другой катетъ $=73^0 19' 19'',6$

8) Въ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ ABC гипотенуза $a=64^0 3' 10''$, сторона $AC=b=40^0 4' 16''$. Сыскать сторону $AB=c$, уголъ B и уголъ C.

рѣш.) Уголъ $C=65^0 50' 14''$

Уголъ $B=45^0 43' 2''$

Сторона $c=55^0 7' 35''$

9) Въ прямоугольномъ сферическомъ тр-кѣ ABC гипотенуза $BC=a=120^0 38' 43''$, уг. $B=135^0 5' 16''$; найти $AC=b$, $AB=c$ и уголъ C.

рѣш.) Сторона $b=142^0 35' 49''$

. . . . $c=50^0 5' 4''$

Уголъ $C=63^0 3' 43''$

10) Въ прямоугольномъ сферическомъ тр-кѣ ABC сторона

$AC=b=43^0 18'2''$, $AB=c=118^0 53'58''$; найти $BC=a$ и углы B и C.

рѣш.) Сторона $a=110^0 35'31''$

Уголъ $B=47^0 6'28''$

. . . . $C=110^0 44'10''$

11) Въ прямоугольномъ сферическомъ тр-кѣ ABC, уголъ $C=52^0 30'$, уг. $B=48^0 12'17''$; найти $BC=a$, $AB=c$ и $AC=b$.

рѣш.) Сторона $a=46^0 41'21'$

. . . . . $b=32^0 51'10''$

. . . . . $c=35^0 15'33''$

12) Въ прямоугольномъ сферическомъ тр-кѣ ABC, $AC=b=64^0 30'9''$, уголъ $C=132^0 44'57''$; сыскать $BC=a$, $AB=c$ и уголъ B.

рѣш.) Сторона $a=107^0 56'18''$

. . . . $c=135^0 40'57'$

Уголъ $B=71^0 34'20''$

13) Въ прямоугольномъ сферическомъ тр-кѣ ABC, $AC=b=54^0 28'11''$ и уг. $B=62^0 47'49''$; сыскать $BC=a$, $AB=c$ и уг. C.

рѣш.) Сторона $a=66^0 12'29''$ и $113^0 47'31''$

. . . . $c=46^0 2'15''$ и $133^0 57'45''$

Уголъ $C=51^0 52'23''$ и $128^0 7'37''$

β) Треугольники косоугольные.

1) По даннымъ тремъ сторонамъ сферическаго косоугольнаго тр-ка:

$\alpha=86^0 14'20''$

$\beta=60^0 58'50''$

$\gamma=49^0 40'30''$;

найти противолежащіе углы A, B и C.

рѣш.) Уголъ $A=111^0 52'8'',6$

. . . . $B=54^0 25'3'',1$

. . . . $C=45^0 9'27'',6$

2) По тремъ даннымъ сторонамъ сферическаго косоугольнаго тр-ка:

$\alpha=79^0 33'20''$

$\beta=65^0 28'20''$

$\gamma=37^0 52'40''$;

сыскать углы A, B и C.

рѣш.) Уголъ $A=105^{0}11'38''$

. . . . $B=63^{0}13'16''$

. . . . $C=37^{0}2'58''$

3) По тремъ сторонамъ косоугольнаго сферическаго тр-ка:

$$\alpha=100^{0}40'6'',8$$

$$\beta=90^{0}50'7'',6$$

$$\gamma=60^{0}0'0'',1;$$

требуется сыскать углы A, B и C.

рѣш.) Уголъ $A=101^{0}51'4'',4$

. . . . $B=84^{0}44'33'',6$

. . . . $C=59^{0}35'44'',0$

4) По тремъ угламъ сферическаго косоугольнако тр-ка:

$$A=64^{0}0'14''$$

$$B=80^{0}30'16''$$

$$C=41^{0}16'21'';$$

найти стороны α, β и γ.

рѣш.) Сторона $\alpha=30^{0}12'0'',3$

. . . . . $\beta=33^{0}30'9'',6$

. . . . . $\gamma=21^{0}39'50'',6$

5) По тремъ угламъ сферическаго косоугольнаго тр-ка:

$$A=82^{0}45'40''$$

$$B=65^{0}11'20''$$

$$C=44^{0}37'20'';$$

сыскать стороны α. β и γ.

рѣш.) Сторона $\alpha=48^{0}14'9''$

. . . . $\beta=43^{0}2'17''$

. . . . $\gamma=31^{0}52'49''$

6) По тремъ угламъ сферическаго косоугольнаго тр-ка:

$$A=120^{0}2'0'',63$$

$$B=113^{0}4'0'',76$$

$$C=101^{0}7'0'',12;$$

отыскать противолежащія стороны α, β и γ.

рѣш.) Сторона $\alpha=118^{0}4'52'',8$

. . . . $\beta=110^{0}20'31'',4$

. . . $\gamma=89^{0}45'47'',2$

7) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны двѣ стороны и уголъ между ними лежащій, именно:

$\alpha = 39^0 10'$

$\beta = 66^0 14'$

$C = 110^0 8'$;

найти прочія части.

рѣш.) Уголъ $A = 36^0 38' 38'',70$

. . . $B = 59^0 52' 0'',08$

Сторона $\gamma = 83^0 28' 57'',56$

8) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны двѣ стороны и уголъ между ними содержащійся, именно:

$\gamma = 86^0 3' 13''$

$\beta = 112^0 57' 10''$

$A = 56^0 3' 0''$;

сыскать углы B, C и сторону α.

рѣш.) Уголъ $B = 119^0 3' 34''$

. . . . $C = 71^0 16' 0''$

Сторона $\alpha = 60^0 54' 34''$

9) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны двѣ стороны и уголъ между ними лежащій, именно:

$\alpha = 23^0 27' 42'',6$

$\beta = 86^0 36' 26'',7$

$C = 218^0 7' 57'',9$;

найти прочія части.

рѣш.) Уголъ $A = 345^0 15' 25'',4$

. . . $B = 320^0 21' 9'',1$

Сторона $\gamma = 104^0 58' 16'',6$

10) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны два угла и сторона между ними лежащая, именно:

$A = 40^0 40'$

$B = 70^0 20'$

$\gamma = 120^0 32'$;

требуется найти остальныя части.

рѣш.) Уголъ $C = 124^0 32' 36'',48$

Сторона $\alpha = 42^0 57' 20'',76$

. . . . $\beta = 100^0 2' 14'',50$

11) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны два угла и сторона имъ прилежащая, именно:

$A=66^{0}35'40''$

$B=20^{0}42'20''$

$\gamma=77^{0}11'20''$;

сыскать прочія части.

рѣш.) Уголъ $C=107^{0}26'8''$

Сторона $\alpha=69^{0}42'45''$

. . . . $\beta=21^{0}11'3''$

12) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны два угла и сторона между ними лежащая, именно:

$A=174^{0}29'47'',06$

$B=1^{0}19'26'',68$

$\gamma=92^{0}1'45'',0$;

найти остальныя части.

рѣш.) Сторона $\alpha=105^{0}23'50''$

. . . . . $\beta=13^{0}25'54''$

Уголъ $C=5^{0}42'20''$

13) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ, именно:

$\alpha=60^{0}40'$

$\beta=80^{0}20'$

$A=50^{0}26'$;

сыскать остальныя части.

рѣш.) Уголъ $B=60^{0}39'26'',36$ или $119^{0}20'33'',64$

. . . $C=127^{0}26'32'',74$ или $29^{0}35'0'',82$

Сторона $\gamma=116^{0}7'6'',29$ или $33^{0}56'20'',78$

14) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ, именно:

$\alpha=35^{0}55'$

$\beta=40^{0}0'1''$

$A=59^{0}59'59''$;

найти остальныя части.

рѣш.) Уголъ $B=71^{0}37'0'',5$

. . . . $C=59^{0}18'55',8$

Сторона $\gamma=35^{0}37'41'',2$

15) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны два угла и сторона, противолежащая одному изъ нихъ, именно:

$$A=80^{\circ}32'$$
$$B=110^{\circ}12'$$
$$\alpha=70^{\circ}16';$$

опредѣлить прочія части.

рѣш.) Сторона $\beta=116^{\circ}25'3'',08$

. . . . $\gamma=117^{\circ}46'21'',97$

Уголъ $C=111^{\circ}59'49'',10$

16) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны два угла и сторона, противолежащая одному изъ нихъ, именно:

$$A=90^{\circ}14'$$
$$B=60^{\circ}17'$$
$$\alpha=55^{\circ};$$

найти остальныя части.

рѣш.) Сторона $\beta=45^{\circ}21'4'',7$

. . . . $\gamma=35^{\circ}3'32'',2$

Уголъ $C=44^{\circ}31'39'',8$

17) Въ сферическомъ косоугольномъ тр-кѣ извѣстны углы:

$$A=59^{\circ},8463$$
$$B=58^{\circ},9770$$
$$C=59^{\circ},4332;$$

требуется отыскать остальныя части.

рѣш.) Рѣшеніе невозможно; ибо тр-къ данъ не сферическій.

18) Найти эксцессъ (сферическій избытокъ), по даннымъ двумъ угламъ и сторонѣ, противолежащей одному изъ нихъ, именно:

$$A=76^{\circ}1'54'',75$$
$$B=58^{\circ}20'32'',32$$
$$\alpha=54^{\circ}12'0''$$

рѣш.) Эксцессъ $=20^{\circ}22'23'',09$

19) Опредѣлить: какую часть отъ всей поверхности шара (S) составитъ площадь сферическаго тр-ка, коего углы суть:

$$A=43^{\circ}20'$$
$$B=79^{\circ}9'59''$$
$$C=82^{\circ}34'6''?$$

рѣш.) Площадь сферическаго тр-ка $=\frac{90245}{2592000}.\ S=0,0348167.S$

20) По даннымъ тремъ угламъ сферическаго тр-ка и радiусу шара r, именно:

$$A=81^{0}12'$$
$$B=120^{0}20'$$
$$C=79^{0}51'$$
$$r=860 \text{ мил.}$$

найти площадь F.

рѣш.) $F=1541045,352$ □ миль.

21) Требуется опредѣлить радiусъ шара, на которомъ лежитъ тр-къ, имѣющiй 700 □ миль и коего углы суть:

$$A=70^{0}$$
$$B=75^{0}$$
$$C=80^{0}$$

рѣш.) Радiусъ шара=29,8541 мил.

22) По извѣстной площади Δ, тр-ка на землѣ, выраженнаго въ квадратныхъ футахъ, по длинѣ градуса, равной 365154,6 фут., опредѣлить величину эксцесса ε въ секундахъ.

рѣш.) Логариѳмъ эксцесса $\varepsilon=\log\Delta-9,3267737$;

т. е., ежели изъ логариѳма даннаго числа квадратныхъ футовъ, означающихъ площадь тр-ка, вычтемъ постоянный логариѳмъ 9,3267737, то получимъ логариѳмъ сферическаго избытка въ секундахъ. Взятый антилогариѳмъ опредѣлитъ самую величину избытка.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

Задачи Аналитической Геометріи.

a) на плоскости.

1) Дано уравненіе прямой линіи $5x + 6y = 36$; найти уголъ образуемый ею съ осью абсциссъ, равно и отрѣзокъ, который она дѣлаетъ по оси ординатъ.

рѣш.) Уголъ $= 140^\circ 11' 40''$; отрѣзокъ $= 6$

2) Извѣстны координаты двухъ точекъ: 1-ой $x' = -3$; $y' = 10,5$, 2-ой $x'' = 0$; $y'' = -5,9$. Требуется составить уравненіе прямой, проходящей чрезъ эти точки и опредѣлить уголъ, подъ которымъ она пересѣкаетъ ось абсциссъ.

рѣш.) Уравненіе линіи есть: $y = -5,46x - 5,9$

Искомый уголъ $= 100^\circ 22', 43''$

3) Даны уравненія двухъ прямыхъ линій: $2x - y = a$; $y = b$, требуется опредѣлить координаты точки ихъ взаимнаго пересѣченія.

рѣш.) Абсцисса искомой точки $= \frac{a+b}{2}$

4) Даны уравненія двухъ прямыхъ линій: $0,5x - 2y = 3$ и $5y - 3,5x = 10$; опредѣлить уголъ ихъ взаимнаго пересѣченія.

рѣш.) Искомый уголъ $= 20^\circ 57', 20''$

5) Даны уравненія двухъ линій $x = 0$; $2y = 0,8x - 7$, найти уголъ ихъ взаимнаго пересѣченія.

рѣш.) Искомый уголъ $= 68^\circ 11' 55''$

6) Даны уравненія двухъ прямыхъ линій: $y - 5x - 7 = 0$, и $2y - 2x = 13x + 36 - y$; требуется опредѣлить взаимное положеніе сихъ линій.

рѣш.) Линіи параллельны между собою.

7) Даны уравненія двухъ прямыхъ линій: $\frac{x+3}{3} = -y$, и $\frac{y}{2} - x - 3 = \frac{x+5}{2}$; требуется опредѣлить взаимное положеніе сихъ линій.

рѣш.) Линіи взаимно перпендикулярны.

8) Въ плоскости даны двѣ точки, координаты ихъ опредѣляющія суть: (13,17),(11,—19); требуется опредѣлить взаимное разстояніе сказанныхъ точекъ.

рѣш.) Искомое разстояніе $=36{,}05$

9) Дана окружность, коей радіусъ $R=1$; еще извѣстна абсцисса x, считаемая отъ центра, точки взятой на сказанной окружности,— она есть 0,5. Требуется опредѣлить углы образуемые діаметромъ съ прямыми линіями, проходящими чрезъ концы его и проведенными въ означенную точку, и также: найти длину сихъ линій.

рѣш.) Уголъ образуемый одною линіею $=60^0$

. . . . другою линіею $=30^0$

Длина первой линіи $=1$

Длина второй линіи $=1{,}732...$

10) На эллипсисѣ, коего полуоси суть: a и b, взята точка (x',y') на его окружности, вычислить радіусы векторы ϱ и ϱ'.

рѣш.) $\varrho=\sqrt{y'^2+(x'-\varepsilon)^2}$

$\varrho'=\sqrt{y'^2+(x'+\varepsilon)^2}$

11) Даны полуоси эллипсиса a и b и абсцисса нѣкоторой точки, взятой на его окружности, $x=n$; найти разстояніе центра эллипсиса отъ сказанной точки.

рѣш.) Искомое разстояніе $=\sqrt{b^2+\frac{\varepsilon^2}{a^2}n^2}$

12) Дано уравненіе эллипсиса $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ и прямой $y=Ax$, проходящей чрезъ центръ его; вычислить координаты (x',y') точекъ взаимнаго пересѣченія эллипсиса съ сказанною прямою.

рѣш.) $x'=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2A^2+b^2}}$, $y'=\pm\frac{abA}{\sqrt{a^2A^2+b^2}}$

13) По даннымъ полуосямъ эллипсиса a и b, вычислить его параметръ p.

рѣш.) $p=\frac{2b^2}{a}$

14) Въ эллипсисѣ даны оси 40 и 30 саж., извѣстны также координаты взятой на немъ точки: $x=10$, $y=13$; найти радіусы векторы

ϱ и ϱ', и уголъ образуемый касательною линіею съ осью абсциссъ, проведенною въ данную точку.

рѣш.) $\varrho = 26,62$

$\varrho' = 13,38$

Искомый уголъ $= 156^\circ 36' 9''$

15) Дано уравненіе, принадлежащее эллипсису $3y^2 + 2x^2 = 5$, требуется опредѣлить величину осей.

рѣш.) Большая ось $= 2\sqrt{\frac{5}{2}}$

а меньшая $= 2\sqrt{\frac{5}{3}}$

Примѣчаніе. Оси обозначатся, когда данное уравненіе умножимъ на $\frac{5}{2.3}$: вообще на дробь, у которой числителемъ сдѣланъ извѣстный членъ второй части, а знаменателемъ произведеніе коеффиціентовъ при неизвѣстныхъ — причина очевидна.

16) Дано уравненіе эллипсиса $4y^2 + 4x^2 = 3$, опредѣлить величину осей.

рѣш.) Въ этомъ эллипсисѣ оси равны, и каждая $= \sqrt{3}$; слѣдовательно данное уравненіе принадлежитъ кругу, коего радіусъ $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

17) Въ эллипсисѣ извѣстны: отношеніе бо́льшей оси къ ме́ньшей $= m$, эксцентрицитетъ $\varepsilon = n$. Найти оси и разстояніе фокусовъ отъ вершинъ эллипсиса и возстановить его уравненіе.

рѣш.) Большая ось $= \frac{2mn}{\sqrt{m^2 - 1}}$

Меньшая ось $= \frac{2n}{\sqrt{m^2 - 1}}$

Разстояніе фокуса отъ вершинъ эллипсиса $= \frac{n(m - \sqrt{m^2 - 1})}{\sqrt{m^2 - 1}}$

Уравненіе эллипсиса . . $\frac{m^2 n^2}{m^2 - 1} y^2 + \frac{n^2}{m^2 - 1} x^2 = \frac{m^2 n^4}{(m^2 - 1)^2}$

18) Въ эллипсисѣ, коего оси суть 324 и 271 саж., проведенъ изъ нѣкоторой точки его окружности радіусъ векторъ, пересѣкающій большую ось подъ угломъ въ $35^\circ 40' 55''$. Требуется опредѣлить длину проведеннаго радіуса вектора и еще величину другаго ему парнаго.

рѣш.) Первый радіусъ векторъ $=204,2788$ } саж.
Второй . . . . $=119,7212$ }

19) Въ эллипсисѣ извѣстны оси $2a$ и $2b$, еще даны координаты нѣкоторой точки, взятой на его окружности, (x', y'); найти величину малой нормали и тангенса, проведенныхъ въ сказанную точку и опредѣлить ихъ взаимное отношеніе.

рѣш.) Нормаль $=\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-\varepsilon^2 x'^2}$

Тангенсъ $=\frac{y'}{bx'}\sqrt{a^4-\varepsilon^2 x'^2}$

Ихъ отношеніе $=\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$

20) Въ эллипсисѣ извѣстна субнормаль $=n$ и субтангенсъ $=m$, еще дана абсцисса $x=p$ точки на окружности эллипсиса, въ которую проведена соотвѣтствующая касательная; требуется опредѣлить полуоси a и b и вычислить разстояніе фокусовъ.

рѣш.) $a=\sqrt{p(p+m)}$

$b=\sqrt{n(p+m)}$

Разстояніе фокусовъ $=2\sqrt{(p+m)(p-n)}$

21) На эллипсисѣ дана точка, коей абсцисса $=15$ саж., въ эту точку проведена касательная; требуется опредѣлить разстояніе центра и вершинъ эллипсиса отъ мѣста встрѣчи касательной съ осью абсциссъ, предполагая, что большая ось его $=200$ саж.

рѣш.) Искомое разстояніе центра $=666,66$
. . . ближайшей вершины $=566,66$
. . . . дальней вершины $=766,66$

22) Дана площадь эллипсиса m и эксцентрицитетъ ε; требуется найти оси.

рѣш.) Малая ось $=\pm 2\sqrt{\frac{-\varepsilon^2\pi\pm\sqrt{\varepsilon^4\pi^2+4m^2}}{2\pi}}$

Большая ось $=\frac{2m}{\pm\pi\sqrt{\frac{-\varepsilon^2\pi\pm\sqrt{\varepsilon^4\pi^2+4m^2}}{2\pi}}}$

Во что обратятся выводы, когда мы ихъ примѣнимъ къ кругу?

23) Въ параболѣ, коей параметръ $=10$ саж., чрезъ вершину, проведена прямая, составляющая съ осью ея уголъ въ $1^\circ 15'$; требуется опредѣлить точку пересѣченія сказанной прямой съ вѣтвію параболы.

рѣш.) Абсцисса искомой точки $=21003{,}3$ саж.
Ордината ея . . . . . . $=458{,}3$ саж.

24) Въ параболѣ извѣстны: ордината a нѣкоторой ея точки и разность d между абсциссою и разстояніемъ фокуса отъ вершины; требуется найти разстояніе сказанной точки отъ директрисы.

рѣш.) Искомое разстояніе $=\sqrt{a^2+d^2}$

25) Извѣстно разстояніе d директрисы параболы отъ ея вершины, требуется найти величину параметра и радіуса вектора, проведеннаго въ точку параболы, коей абсцисса $=m$; далѣе отыскать соотвѣтствующіе: субтангенсъ, субнормаль и тангенсъ.

рѣш.) Параметръ $=4d$
Радіусъ векторъ $=m+d$
Субтангенсъ $=2m$
Субнормаль $=2d$
Тангенсъ $=2\sqrt{m(d+m)}$

26) На параболѣ взята точка, коей ордината $=n$; найти величину радіуса вектора ϱ тангенса T и нормали N, проведенныхъ въ сказанную точку, и опредѣлить отношеніе перваго къ двумъ остальнымъ; при чемъ извѣстно, что разстояніе фокуса до директрисы $=m$.

рѣш.) $$\varrho=\frac{n^2+m^2}{2m}$$

$$T=\frac{n}{m}\sqrt{n^2+m^2}$$

$$N=\sqrt{n^2+m^2}$$

$$\varrho:T=\frac{\sqrt{n^2+m^2}}{2n}$$

$$\varrho:N=\frac{\sqrt{n^2+m^2}}{2m}$$

27) Въ параболѣ извѣстна прямая l, соединяющая нѣкоторую точку

ея съ вершиной; найти координаты этой точки и площадь P, соотвѣтствующаго имъ сектора; при чемъ извѣстно, что параметръ параболы $=m$.

рѣш.) Абсцисса $x=\frac{\sqrt{m^2+4l^2}-m}{2}$

Ордината $y=\sqrt{\frac{m(\sqrt{m^2+4l^2}-m)}{2}}$

Площадь $P=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{m(\sqrt{m^2+4l^2}-m)^3}{2}}$

28) Дано уравненіе, принадлежащее гиперболѣ $2y^2-4x^2=-7$; требуется опредѣлить величину осей.

рѣш.) Первая ось $=\sqrt{7}$

Вторая ось $=\sqrt{14}$

29) Какую кривую выражаетъ уравненіе $\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}x^2=2$?

рѣш.) Уравненіе выражаетъ гиперболу, которой главная ось совпадаетъ съ осью ординатъ, а другая съ осью абсциссъ, первая $=4$, а вторая $=2\sqrt{6}$.

30) Дано уравненіе гиперболы $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$ и прямой $y=Ax$, проходящей чрезъ ея центръ, вычислить координаты (x', y') точки ихъ взаимнаго пересѣченія и вывести отсюда заключеніе для существованія ассимптотъ.

рѣш.) $x'=\frac{\pm ab}{\sqrt{b^2-A^2a^2}}, y'=\pm\frac{abA}{\sqrt{b^2-A^2a^2}}$

Для существованія ассимптотъ имѣемъ условія:

$b^2-A^2a^2=0$, или $A=\frac{b}{a}$

31) Въ равносторонней гиперболѣ извѣстна ось $2a$ и прямая l, соединяющая нѣкоторую ея точку съ центромъ; требуется опредѣлить координаты сказанной точки и величину соотвѣтствующаго меньшаго радіуса вектора.

рѣш.) Абсцисса искомой точки $=\sqrt{\frac{a^2+l^2}{2}}$

Ордината . . . . $=\sqrt{\frac{l^2-a^2}{2}}$

Меньшій радіусъ векторъ $=\frac{l^2}{a+\sqrt{a^2+l^2}}$

32) Въ гиперболѣ, коей большая ось $=1000$ саж., а меньшая $=777$ саж., радіусъ векторъ, проведенный изъ нѣкоторой ея точки, составляетъ уголъ съ большею осью въ $17^\circ 41'$. Найти величину обоихъ радіусовъ векторовъ.

рѣш.) Бо́льшій радіусъ векторъ $=1136,804$ } саж.
Меньшій . . . . $=136,804$ }

33) Въ гиперболѣ извѣстны полуоси a и b и абсцисса нѣкоторой точки $x=n$; требуется найти разстояніе точки, гдѣ тангенсъ пересѣкаетъ ось абсциссъ, считая оное отъ центра, а также величину части перпендикулярной линіи, возставленной къ большой оси, содержащейся между вершиною гиперболы и точкою ея встрѣчи съ тангенсомъ.

рѣш.) Искомое разстояніе . . . . $=\frac{a^2}{n}$

Величина перпендикулярной линіи $=\frac{b\sqrt{n-a}}{\sqrt{n+a}}$

34) Дана точка на гиперболѣ, координаты ея: $x=n$, $y=m$, параллельны ассимптотамъ, составляющимъ между собою уголъ α; найти полуоси гиперболы a и b и возстановить ея уравненіе.

рѣш.) $a=2\cos\frac{1}{2}\alpha\sqrt{mn}$;

$b=2\sin\frac{1}{2}\alpha\sqrt{mn}$

Искомое Уравненіе есть $\cos^2\frac{1}{2}\alpha y^2-\sin^2\frac{1}{2}\alpha x^2=-4\cos^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\frac{1}{2}\alpha mn$

35) Дано уравненіе второй степени о двухъ перемѣнныхъ величинахъ $ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0$; опредѣлить условія, которыя должны существовать между его коеффиціентами, чтобы это уравненіе выражало мнимую кривую.

рѣш.) Для сего единовременно должны выполняться слѣдующія условія: $b^2-ac=0$; $bd-ae=0$ и $d^2-af<0$;
или $b^2-ac<0$ и $(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)<0$

36) Какое геометрическое значенiе имѣетъ уравненiе:

$$2y^2+10xy+13x^2+1=0?$$

рѣш.) Данное уравненiе ничего не выражаетъ, или какъ говорятъ, выражаетъ мнимую кривую.

37) Опредѣлить условiя, при которыхъ уравненiе $ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0$ выражаетъ точку.

рѣш.) Для сего необходимо чтобы было единовременно:

$$b^2-ac<0 \text{ и } (bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)=0$$

38) Какое геометрическое значенiе имѣетъ уравненiе $4y^2-32xy+80x^2-24y+40x+85=0$?

рѣш.) Уравненiе выражаетъ точку, опредѣляемую координатами:

$$x=\tfrac{7}{4} \text{ и } y=10$$

39) Опредѣлить условiя, при которыхъ уравненiе $a^2y^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0$ выражаетъ двѣ прямыя линiи.

рѣш.) Искомыя условiя суть: $(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)=0$ и

$$b^2-ac\leq 0$$

40) Какое геометрическое значенiе имѣетъ уравненiе $3y^2+2xy-5x^2-2y-6x-1=0$?

рѣш.) Уравненiе выражаетъ двѣ прямыя линiи.

41) Опредѣлить кривую, выражаемую уравненiемъ $y^2-2xy+3x^2-2y+4x-3=0$.

рѣш.) Уравненiе выражаетъ эллипсисъ.

42) Опредѣлить кривую, выражаемую уравненiемъ $y^2-2xy+2x^2-2y+2x=0$.

рѣш.) Уравненiе выражаетъ эллипсисъ, пересѣкающiй обѣ оси координатъ.

43) Опредѣлить кривую, выражаемую уравненiемъ $4y^2-2xy+x^2-8y+4x+4=0$.

рѣш.) Кривая будетъ эллипсисъ, касающiй ось ординатъ.

44) Опредѣлить кривую, выражаемую уравненiемъ $y^2-2xy+2x^2-3x+2=0$.

рѣш.) Кривая есть эллипсисъ, не пересѣкающiй осей координатъ.

45) Опредѣлить кривую, выражаемую уравненiемъ $2y^2+4x^2-6y+6x-5=0$.

рѣш.) Кривая есть эллипсисъ, коего главныя оси параллельны

осямъ координатъ (ибо нѣтъ члена съ произведеніемъ xy)

46) Опредѣлить кривую, выражаемую уравненіемъ $y^2 - 2xy + x^2 + 2y - 3x - 3 = 0$.

рѣш.) Кривая есть парабола.

47) Опредѣлить кривую, выражаемую уравненіемъ $y^2 - 6xy + 9x^2 - 3y + 9x - 10 = 0$.

рѣш.) Уравненіе будетъ выражать систему двухъ параллельныхъ прямыхъ; ибо оно можетъ принять такой видъ: $(y-3x+2)(y-3x-5) = 0$.

48) Что выражаетъ уравненіе $y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 4x + 1 = 0$?

рѣш.) Уравненіе выражаетъ одну прямую линію; ибо оно приводится къ виду $(y-2x+1)^2 = 0$.

49) Какую кривую выражаетъ уравненіе $y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 8x + 13 = 0$?

рѣш.) Уравненіе выражаетъ гиперболу.

50) Опредѣлить кривую, выражаемую уравненіемъ $y^2 - 2xy - 1 = 0$.

рѣш.) Уравненіе принадлежитъ гиперболѣ, и начало координатъ въ ея центрѣ, ось же абсциссъ служитъ для нея ассимптотою.

51) Опредѣлить кривую, выражаемую уравненіемъ $2xy - x + 2 = 0$.

рѣш.) Уравненіе принадлежитъ гиперболѣ, въ коей ассимптоты параллельны осямъ координатъ.

b) въ пространствѣ.

1) Даны двѣ точки въ пространствѣ; координаты первой суть: $x=12$; $y=7$; $z=-9$, для второй же $x=-9$; $y=0$; $z=0,5$. Требуется опредѣлить углы, (*) образуемые проэкціями линіи, проходящей чрезъ эти точки, въ плоскостяхъ xz и yz, съ осями x—овъ и y—овъ.

рѣш.) Уголъ съ осью x— овъ $= 155^0 39' 32''$

. . . . y— овъ $= 126^0 23' 4''$

2) Даны уравненія проложеній, опредѣляющихъ двѣ прямыя линіи въ пространствѣ: $x - 2,8z - 3 = -3x$; $7y + 7 = -45z - 2y$ для

(*) Здѣсь, какъ и въ плоской Аналитикѣ, углы считаются въ сторону положительныхъ координатъ.

первой линіи, и $-x+5=1,4z-3x; 4y+20z=7$ для второй. Требуется узнать взаимное положеніе линій.

рѣш.) Линіи, опредѣляемыя данными проложеніями, параллельны.

3) Даны уравненія проложеній, опредѣляющихъ двѣ прямыя линіи въ пространствѣ: $x=z+2$; $y=3z+4$, и $x=5z+6$; $y=7x+8$. Требуется узнать: не пересѣкаются ли эти линіи? и ежели пересѣкаются, то опредѣлить координаты точки ихъ взаимнаго пересѣченія.

рѣш.) Линіи, опредѣляемыя данными проэкціями, пересѣкаются. Координаты точки ихъ взаимнаго пересѣченія суть: $x=1$; $y=1$; $z=-1$.

4) По даннымъ уравненіямъ проэкцій, опредѣляющихъ положеніе двухъ прямыхъ линій въ пространствѣ: $x=z-0,5$; $y=2z-10$ и $x=3z+14$; $y=4z-1,8$; опредѣлить взаимное наклоненіе линій.

рѣш.) Наклоненіе линій$=16^0 6'$

5) Даны уравненія проложеній двухъ прямыхъ въ пространствѣ: $x-5=3\frac{1}{2}z$; $\frac{y}{2}+2,5=z$ и $10x-\frac{100z}{35}=-20$; $3+z=-y$. Требуется опредѣлить взаимное положеніе линій.

рѣш.) Линія, опредѣляемыя данными проэкціями, перпендикулярны.

6) Какую поверхность выражаетъ уравненіе: $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$, въ коемъ x,y,z, означаютъ координаты, отнесенныя къ прямоугольнымъ осямъ?

рѣш.) Уравненіе выражаетъ поверхность сферическую, для которой три координаты центра (α,β,γ) суть:

$$\alpha=-\frac{A}{2};\ \beta=-\frac{B}{2};\ \gamma=-\frac{C}{2}$$

а радіусъ $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$

7) Дается сумма квадратовъ (q^2) разстояній нѣкоторой точки (p) отъ (n) (*) другихъ точекъ, коихъ координаты по порядку суть: (x',y',z'); (x'',y'',z''); (x''',y''',z'''); требуется опредѣлить мѣсто точки (p).

(*) Въ настоящемъ случаѣ будемъ разсматривать только три точки; ибо для бо́льшаго числа ихъ, какъ выводъ, такъ и самое заключеніе, остаются тѣже самые.

рѣш.) Уравненіе, опредѣляющее мѣсто точки p будетъ:

$$z^2+y^2+x^2-2\,\frac{z'+z''+z'''}{3}\,z-2\,\frac{y'+y''+y'''}{3}\,y-2\,\frac{x'+x''+x'''}{3}\,x+$$
$$\tfrac{1}{3}\left(z'^2+y'^2+x'^2+z''^2+y''^2+x''^2+z'''^2+y'''^2+x'''^2-q^2\right)=0,$$

которое очевидно принадлежитъ поверхности сферической.

8) По даннымъ уравненіямъ направляющей $x^2+y^2=r^2$; $z=0$ и образующей $x=az+\alpha$; $y=bz+\beta$, составить уравненіе цилиндрической поверхности.

рѣш.) Искомое уравненіе есть: $(x-az)^2+(y-bz)^2=r^2$. Какое измѣненіе послѣдуетъ съ уравненіемъ, когда ось цилиндра будетъ совпадать съ осью z—овъ?

9) Образующая опредѣляется уравненіями $x=mz+\alpha$; $y=nz+\beta$; уравненія же для направляющей суть: $ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+1=0$; $z=0$. Требуется составить уравненіе цилиндрической поверхности.

рѣш.) Искомое уравненіе есть:

$$(an^2+2bmn+cm^2)z^2+ay^2+cx^2+2bxy-2(bn+cm)xz-2(an+bm)yz$$
$$-2(dn+em)z+2dy+2ex+1=0.$$

10) По даннымъ уравненіямъ для образующей $x=mz+\alpha$; $y=nz+\beta$ и также для направляющей: $a^2y^2\pm b^2x^2=a^2b^2$; $z=0$ или $y^2=px$; $z=0$, требуется составить уравненіе цилиндрической поверхности, какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ.

рѣш.) Въ первомъ случаѣ, уравненіе цилиндрической поверхности, есть:

$$(a^2n^2\pm b^2m^2)z^2+a^2y^2\pm b^2x^2\mp 2b^2mxz-2a^2nyz=a^2b^2;$$

а во второмъ:

$$n^2z^2+y^2-2nyz+mpz-px=0$$

11) Даны уравненія: $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$; $z=C$ для направляющей, и $x=az$; $y=bz$ для образующей; требуется составить уравненіе поверхности конической.

рѣш.) Искомое уравненіе есть:

$$A^2y^2+B^2x^2-\frac{A^2B^2}{C^2}z^2=0$$

12) Даны уравненія: $x^2+y^2=r^2$; $z=0$ для направляющей и $x-x'=a\times(z-z')$; $y-y'=b(z-z')$ для образующей; требуется составить уравненіе конической поверхности.

Рѣш.) Искомое уравненіе есть:

$$[x'(z-z')-z'(x-x')]^2+[y'(z-z')-z'(y-y')]^2=r^2(z-z')^2$$

Какое измѣненіе послѣдуетъ съ уравненіемъ, когда вершина конуса будетъ находиться на оси z—овъ?

13) Даны уравненія: $ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+1=0; z=0$ для направляющей, и $x-\alpha=\lambda'(z-\gamma)$; $y-\beta=\lambda'(z-\gamma)$ для образующей; требуется составить уравненіе конической поверхности.

Рѣш.) Искомое уравненіе есть:

$$\left.\begin{matrix} a(\beta z-\gamma y)^2+2b(\beta z-\gamma y)(\alpha z-\gamma x)+c(\alpha z-\gamma x)^2+2d(\beta z-\gamma y)(z-\gamma) \\ +2e(\alpha z-\gamma x)(z-\gamma)+(z-\gamma)^2 \end{matrix}\right\}=0.$$

14) Даны уравненія: $a^2y^2\pm b^2x^2=a^2b^2$; $z=\gamma$, или $y^2=px$; $z=\gamma$ для направляющихъ и $x=\lambda'z$; $y=\lambda''z$ для образующей; требуется составить уравненіе конической поверхности въ обоихъ случаяхъ.

Рѣш.) Въ первомъ случаѣ, искомое уравненіе есть:

$$a^2b^2z^2=a^2\gamma^2y^2\pm b^2\gamma^2x^2;$$

а во второмъ $\gamma^2y^2-pxz=0$.

15) Положеніе кривой опредѣляется уравненіями: $az^2+bx^2+2cx+d=0$; $y=0$; требуется составить уравненіе поверхности вращенія, происходящей отъ обращенія сказанной кривой около оси z—овъ.

Рѣш.) Искомое уравненіе есть:

$$\left\{az^2+by^2+bx^2+d\right\}^2=4c^2y^2+4c^2x^2$$

16) Положеніе равносторонней гиперболы опредѣляется уравненіями: $xz=p^2$; $y=0$; требуется составить уравненіе поверхности вращенія, происходящей отъ обращенія сказанной кривой около ея ассимптоты.

Рѣш.) Искомое уравненіе есть:

$$y^2z^2+x^2z^2=p^4$$

17) Положеніе цѣпной линіи опредѣляется уравненіями: $x=\frac{1}{2}a\left\{e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right\}$; $y=0$; требуется составить уравненіе поверхности вращенія, происходящей отъ обращенія сказанной кривой около оси z—овъ.

Рѣш.) Уравненіе искомой поверхности есть:

$$y^2+x^2=\frac{1}{4}a^2\left\{e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right\}^2$$

ОТДѢЛЪ ШЕСТЫЙ.

Примѣненіе Дифференціальнаго исчисленія къ рѣшенію различныхъ вопросовъ.

a) Задачи на употребленіе наибольшихъ и наименьшихъ.

1) Изъ всѣхъ прямоугольниковъ, имѣющихъ туже площадь (p), найти тотъ, коего периметръ есть наименьшій.

Рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=2x+\frac{2p}{x}$, гдѣ y есть искомый периметръ, а x одна изъ сторонъ его составляющихъ. Изъ первой производной найдемъ, что $x=\sqrt{p}$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная положительна, то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наименьшей величинѣ функціи y.

2) Изъ всѣхъ прямоугольниковъ, имѣющихъ тотъ же периметръ (c), найти тотъ, коего площадь есть наибольшая.

Рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=\frac{1}{2}cx-x^2$, гдѣ y есть искомая площадь, а x одна изъ сторонъ даннаго периметра. Изъ первой производной найдемъ, что $x=\frac{c}{4}$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная отрицательна, то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наибольшей величинѣ функціи y.

3) Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе (a) и одинъ и тотъ же периметръ ($2p$), найти тотъ, коего площадь была бы наибо́льшею.

Рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=\sqrt{[p(p-a)(p-x)(a+x-p)]}$, гдѣ y есть искомая площадь, а x одна изъ остальныхъ двухъ сторонъ. Изъ первой производной найдемъ, что $x=p-\frac{a}{2}$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная отрицательна,

то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наибольшей величинѣ функціи y.

4) На прямой линіи, коей длина для простоты полагается равною единицѣ, проведенной между двумя свѣтилами, изъ коихъ одно въ (n) разъ свѣтитъ сильнѣе другаго, требуется найти точку, которая была бы наименѣе освѣщена.

рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=\frac{n}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}$, гдѣ y есть сила свѣта въ искомой точкѣ, а x ея разстояніе отъ свѣта сильнѣйшаго. Изъ первой производной найдемъ, что $x=\frac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}}$ но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная положительна, то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наименьшей величинѣ функціи y.

5) Двѣ прямыя линіи пересѣкаются подъ прямымъ угломъ; на одной изъ нихъ назначены двѣ точки, лежащія отъ вершины прямаго угла на разстояніяхъ a и b, при чемъ $a<b$; требуется, на другой прямой, найти такую точку, чтобы прямыя линіи, проведенныя изъ нея къ двумъ точкамъ первой линіи, составляли бъ уголъ наибольшій.

рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=\frac{(b-a)x}{ab+x^2}$, гдѣ y есть тангенсъ требуемаго угла, а x отрѣзокъ, опредѣляющій искомую точку. Изъ первой производной найдемъ, что $x=\sqrt{ab}$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная отрицательна, то найденная величина для x-са, соотвѣтствуетъ наибольшей величинѣ функціи y.

6) Положеніе точки внутри прямаго угла опредѣляется координатами a и b; требуется провести, чрезъ сказанную точку, прямую линію такъ, чтобы часть этой линіи, заключенная между сторонами прямаго угла, была бы наименьшею.

рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=\frac{a+x}{x}\sqrt{b^2+x^2}$, гдѣ y есть требуемая линія, а x разстояніе конца ея отъ подошвы ординаты данной точки. Изъ первой производной найдемъ, что $x=\sqrt[3]{ab^2}$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная положи-

тельна, то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наименьшей величинѣ функціи y.

7) Въ треугольникѣ высота h дѣлаетъ по основанію два отрѣзка: изъ нихъ первый есть (a), а второй (b); требуется въ этомъ треугольникѣ вписать наибольшій прямоугольникъ.

рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія $y=\frac{a+b}{h}(hx-x^2)$, гдѣ y есть искомая площадь прямоугольника, а x его высота. Изъ первой производной найдемъ, что $x=\frac{1}{2}h$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная отрицательна, то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наибольшей величинѣ функціи y.

8) Изъ всѣхъ прямоугольниковъ, которые могутъ быть вписаны въ четверти круга, имѣющаго радіусомъ R, найти тотъ, коего площадь была бы наибольшею.

рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=x\sqrt{R^2-x^2}$, гдѣ y есть искомая площадь, а x одна изъ сторонъ прямоугольника, лежащая на радіусѣ. Изъ первой производной найдемъ, что $x=\frac{R}{\sqrt{2}}$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная отрицательна, то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наибольшему значенію функціи y.

9) Изъ всѣхъ прямыхъ цилиндровъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же объемъ (a), найти тотъ, коего полная поверхность была бы наименьшею.

рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=\frac{2a}{x}+2\pi x^2$, гдѣ y есть искомая поверхность, а x радіусъ круга основанія требуемаго цилиндра. Изъ первой производной найдемъ, что $x=\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная положительна, то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наименьшему значенію функціи y.

10) Изъ всѣхъ прямыхъ конусовъ (съ круговымъ основаніемъ), имѣющихъ одинакую боковую поверхность, найти тотъ, коего объемъ былъ бы наибольшій.

рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=\frac{1}{3}\sqrt{(b^4x^2-\pi^2x^6)}$, гдѣ y есть искомый объемъ, x радіусъ круга основанія требуемаго конуса, а b^2 данная боковая поверхность. Изъ первой производной найдемъ, что $x=\frac{b}{\sqrt{\pi}\sqrt{3}}$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная отрицательна, то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наибольшему значенію функціи y.

11) Изъ прямаго конуса, коего высота (h), а радіусъ круга основанія (r), вырѣзать наибольшій цилиндръ.

рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=\frac{h\pi}{r}(rx^2-x^3)$, гдѣ y есть объемъ искомаго цилиндра, а x радіусъ круга его основанія. Изъ первой производной находимъ, что $x=\frac{2}{3}r$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная отрицательна, то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наибольшему значенію функціи y.

12) Изъ круга, имѣющаго радіусомъ r, требуется вырѣзать такой секторъ, чтобы конусъ, коего боковая поверхность составится изъ остальной части круга, былъ бы наибольшій по объему.

рѣш.) Вопросъ рѣшится изъ уравненія: $y=\frac{1}{24\pi^2}\sqrt{(4r^2\pi^2x^4-x^6)}$, гдѣ y есть требуемый объемъ, а x длина дуги, служащей основаніемъ отыскиваемому конусу. Изъ первой производной найдемъ что $x=\frac{2r\pi}{3}\sqrt{6}$; но такъ какъ, при этомъ значеніи x, вторая производная отрицательна, то найденная величина для x-са соотвѣтствуетъ наибольшему значенію функціи y.

b) **Задачи на употребленіе способа касательныхъ.** (*)

1) По данному уравненію логариѳмики: $y=a^x$, требуется опредѣлить ея субтангенсъ, субнормаль, тангенсъ и нормаль.

рѣш.) Субтангенсъ $=Le$ (модулю),

(*) **Въ этомъ отдѣлѣ координаты предполагаются прямоугольными.**

$$\text{Субнормаль} = \frac{y^2}{Le}$$

$$\text{Тангенсъ} \ldots = \sqrt{y^2+Le^2}$$

$$\text{Нормаль} \ldots = y\sqrt{1+\frac{y^2}{(Le)^2}}$$

2) По даннымъ уравненіямъ для циклоиды: $x=R(\omega-\sin\omega), y=R\times(1-\cos\omega)$, найти выраженія для ея субнормали, нормали, субтангенса и тангенса.

Рѣш.) Субнормаль $=\sqrt{(2R-y)y}$

Нормаль ... $=\sqrt{2Ry}$

Субтангенсъ $=y\sqrt{\dfrac{y}{2R-y}}$

Тангенсъ .. $=y\sqrt{\dfrac{2R}{2R-y}}$

3) По данному уравненію циссоиды: $y^2(2r-x)-x^3=0$, составить уравненіе касательной, проведенной въ данную точку (α,β) и найти выраженіе для субтангенса.

Рѣш.) Уравненіе касательной будетъ: $2(2R-\alpha)\beta(y-\beta)=(\beta^2+3\alpha^2)(x-\alpha)$

$$\text{Субтангенсъ} = \frac{2(2r-\alpha)\beta^2}{\beta^2+3\alpha^2}$$

4) По данному уравненію конхоиды: $y^4-2by^3+(x^2+b^2-a^2)y^2-2bx^2y+b^2x^2=0$, составить уравненіе касательной, проведенной въ данную точку (α,β) и найти выраженіе для субтангенса.

Рѣш.) Уравненіе касательной будетъ: $\{2\beta^3-3b\beta^2+(\alpha^2+b^2-a^2)\times\beta-b\alpha^2\}(y-\beta)+(\beta-b)^2\alpha(x-\alpha)=0$

$$\text{Субтангенсъ} = -\frac{\{2\beta^3-3b\beta^2+(\alpha^2+b^2-a^2)\beta-b\alpha^2\}\beta}{(\beta-b)^2\alpha}$$

5) По данному уравненію кардіоиды: $y^4-2(2r^2+2rx-x^2)y^2-4rx^3+x^4=0$, составить уравненіе касательной, проведенной въ данную точку (α,β) и найти выраженіе для субтангенса.

Рѣш.) Уравненіе касательной будетъ: $\beta\,\{\beta^2+\alpha^2-2r(r+\alpha)\}\times$

$$(y-\beta)+\{(\beta^2+\alpha^2)\alpha-r(\beta^2+3\alpha^2)\}(x-\alpha)=0$$

$$\text{Субтангенсъ }=\frac{\beta^2\{\beta^2+\alpha^2-2r(r+\alpha)\}}{r(\beta^2+3\alpha^2)-\alpha(\beta^2+\alpha^2)}$$

6) По данному уравненію лемнискаты: $(y^2+x^2)^2+a^2(y^2-x^2)=0$, составить уравненіе касательной, проведенной въ данную точку (α,β) и найти выраженіе для субтангенса.

Рѣш.) Уравненіе касательной будетъ: $\beta\{2(\beta^2+\alpha^2)+a^2\}\times$

$$(y-\beta)+\alpha\{2(\beta^2+\alpha^2)-a^2\}(x-\alpha)=0$$

$$\text{Субтангенсъ }=-\frac{\{2(\beta^2+\alpha^2)+a^2\}\beta^2}{\{2(\beta^2+\alpha^2)-a^2\}\alpha^2}$$

7) По данному уравненію цѣпной линіи: $y=\frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)$, составить уравненіе касательной, проведенной въ данную точку (α,β) и найти выраженіе для субтангенса.

Рѣш.) Уравненіе касательной будетъ: $2(y-\beta)=\left(e^{\frac{\alpha}{m}}-e^{-\frac{\alpha}{m}}\right)(x-\alpha)$

$$\text{Субтангенсъ }=m\,\frac{e^{\frac{\alpha}{m}}+e^{-\frac{\alpha}{m}}}{e^{\frac{\alpha}{m}}-e^{-\frac{\alpha}{m}}}.$$

8) Дано уравненіе Диностратовой квадратриксы: $y=x.tg\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{\pi x}{2a}\right)$; требуется найти тангенсъ угла, образуемаго произвольною касательною съ осью абсциссъ и опредѣлить: во что обратится этотъ тангенсъ при $x=0$?

$$\text{Рѣш.) Искомый танг. угла }=\frac{a.\sin\left(\pi-\frac{\pi x}{a}\right)-\pi x}{2a.\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{\pi x}{2a}\right)},$$

при $x=0$, танг. $=\frac{0}{0}$

9)* Дано уравненіе квадратриксы Чиргаузена: $y=a.\sin\frac{\pi x}{2a}$, требуется опредѣлить тангенсъ угла, образуемаго произвольною каса-

тельною съ осью абсциссъ и найти: при какихъ значеніяхъ абсциссы, ордината будетъ обращаться въ 0?

рѣш.) Искомый танг. угла $= \frac{1}{2} \pi \cos \frac{\pi x}{2a}$; ордината будетъ обращаться въ нуль, когда $x=0$, или $\pm 2a$, или $\pm 4a$ и т. д.

10) Дано уравненіе кривой: $y=6x-\frac{9}{2}x^2+x^3$; требуется опредѣлить координаты тѣхъ точекъ, въ которыя проведенная касательная, дѣлается параллельною оси абсциссъ.

рѣш.) *Вопросъ рѣшится*, когда найдемъ отношеніе $\frac{dy}{dx}$ и приравняемъ его нулю. Отъ чего получимъ:

для 1-ой точки: $x=1, y=\frac{5}{2}$
для 2-ой точки: $x=2, y=2$

11) Дано полярное уравненіе Архимедовой (Кононовой) спирали: $r=a\varphi$; требуется составить уравненіе той же кривой, по координатамъ прямолинейнымъ и найти тангенсъ угла, образуемаго касательною, проведенною въ данную точку (α, β), съ осью абсциссъ.

рѣш.) Для перехода отъ одной системы координатъ къ другой имѣемъ уравненія: $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = Arc\,tg\,\frac{y}{x}$. Посему будемъ имѣть:

$\sqrt{x^2+y^2}=a.Arctg\frac{y}{x}$ уравненіе спирали по прямолинейнымъ координатамъ.

Искомый же тангенсъ угла $= \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+a\beta}{a\alpha-\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

12) Дано полярное уравненіе спирали параболической: $r=\pm\sqrt{b\varphi}$; требуется составить уравненіе, той же кривой, по координатамъ прямолинейнымъ и найти тангенсъ угла, образуемаго касательною, проведенною въ данную точку (α, β), съ осью абсциссъ.

рѣш.) Требуемое уравненіе будетъ: $x^2+y^2=b.Arctg\frac{y}{x}$

Искомый тангенсъ угла $= \frac{2\alpha(\alpha^2+\beta^2)+b\beta}{b\alpha-2\beta(\alpha^2+\beta^2)}$

13) Дано полярное уравненіе спирали гиперболической: $r=\frac{a}{\varphi}$; требуется составить уравненіе, той же кривой, по координатамъ прямолинейнымъ и найти тангенсъ угла, образуемаго касательною, проведенною въ данную точку (α,β), съ осью абсциссъ.

рѣш.) Требуемое уравненіе будетъ: $Arctg\frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}=a$

Искомый тангенсъ угла $=\dfrac{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-a\alpha}{a\alpha+\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

14) Дано полярное уравненіе логариѳмической спирали: $r=a^{\varphi}$; требуется составить уравненіе, той же кривой, по координатамъ прямолинейнымъ и найти тангенсъ угла, образуемаго касательною, проведенною въ данную точку (α, β), съ осью абсциссъ.

рѣш.) Требуемое уравненіе будетъ: $\sqrt{x^2+y^2}=a^{Arctg\frac{y}{x}}$

Искомый тангенсъ угла $=\dfrac{\alpha.Le+\beta}{\alpha-\beta Le}$

15) Парабола Нейля (вторая кубическая) имѣетъ уравненіемъ $ky^2=x^3$; требуется составить уравненіе касательной къ сей линіи, которая была бы параллельна данной прямой $y=ax+b$.

рѣш.) Требуемое уравненіе касательной будетъ вида: $y-y'=a(x-x')$; но такъ какъ координаты x' и y' могутъ быть найдены при всякомъ тангенсѣ (a), изъ нихъ именно: $x'=\frac{4}{9}a^2k$, а $y'=\frac{8}{27}a^3k$, то заключаемъ, что каково бы ни было положеніе данной прямой, касательная, ей параллельная, въ параболѣ Нейля, будетъ всегда возможна.

16) Кривая дается уравненіемъ $4xy-3rx+ar=0$; требуется разыскать: имѣетъ, или не имѣетъ она ассимптоты?

рѣш.) Кривая имѣетъ двѣ ассимптоты: изъ нихъ первая располагается на разстояніи равномъ $\frac{3}{4}r$, считаемомъ по оси ординатъ, параллельно оси абсциссъ; а другая совпадаетъ съ самою осью ординатъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЗАДАЧИ АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

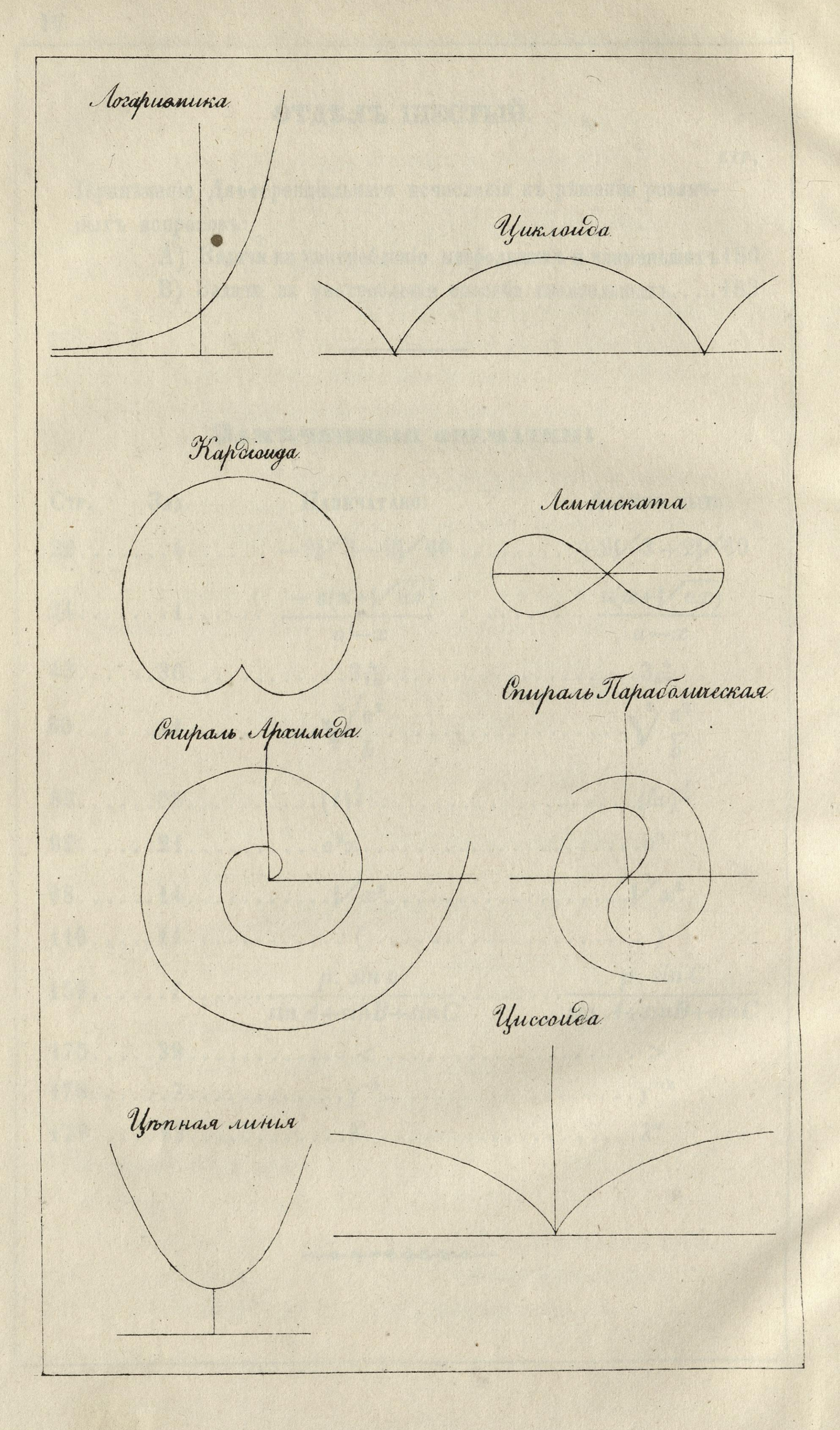
ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

ОТДѢЛЪ ШЕСТЫЙ.

Замѣченныя опечатки:

Стр.	Зад.	Напечатано:	Должно быть:
22	4	$-9\sqrt{3}-2\sqrt{60}$	$+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$
24	1	$\frac{-a(x+\sqrt{ax})}{a-x}$	$\frac{a(x+\sqrt{ax})}{a-x}$
43	36	$3\frac{4}{72}$	$3\frac{4}{27}$
60	11	$\sqrt[5]{\frac{a^2}{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$
86	28	$(l)^{\frac{1}{x}}$	$(lx)^{\frac{1}{x}}$
92	21	a^2x	a^2
98	14	$\sqrt{x^2}$	$\sqrt[3]{x^2}$
116	11	(	)
159	7	$\frac{p.\ \sin c}{\sin A+\sin B+\sin C}$	$\frac{p.\ \sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$
175	39	$<$	$>$
178	7	y''^2	y'''^2
179	13	λ'	λ''


Логариѳмика
Циклоида
Кардіоида
Лемниската
Спираль Параболическая
Спираль Архимеда
Циссоида
Цѣпная линія

Квадратрикса Диностратова

Парабола Нейля

Конхоида

Квадратрикса Чирнгаузена

Спираль Гиперболическая

Спираль Логариѳмическая


2007086781

